காவிப்பகுப்புச் சுருக்கம்

எலியேசர்

கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்

காவிப் பகுப்புச் சருக்கம்

2—5836—1506 (69/4)

காவிப் பகுப்புச் சுருக்கம்

சி. ஜே. எலியேசர்

M.A., Ph.D. (Cantab), D.Sc. (Lond.)

மலாயாப் பல்கலைக் கழகத்துக் கணிதப் பேராசிரியர், இலங்கைப் பல்கலைக் கழகத்தின் முன்னைநாட் கணிதப் பேராசிரியர்.

கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களத்திற்காக

இலங்கை அரசாங்க அச்சுத் திணைக்களத்திற் பதிப்பிக்கப்பட்டது

முதற்பதிப்பு : 1973

DEGREE APPLIED MATHEMATICS—Vol I

CONCISE VECTOR ANALYSIS

by

C. J. ELIEZER

by

THE EDUCATIONAL PUBLICATIONS DEPARTMENT.

நூலாசிரியரின் அனுமதியுடன கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களத்தினால் தமிழில் மொழிபெயர்த்து வெளியிடப்பெற்றது.

அறிமுகம்

இந்நூல், இலங்கைப் பல்கலைக்கழகத்து முன்னைநாட் கணிதப் பேராசிரியரும், மலாயாப் பல்கலைக்கழகத்துக் கணிதப் பேராசிரியருமான கலாநிதி சி. ஜே. எலியேசர், **M. A., Ph. D. (Cantab), D. Sc. (Lond.)** அவர்களால் எழுதப்பட்டது. முதனூல் ஆங்கிலத்தில் எழுதப்பட்டது; பின்னர் அது தமிழாக்கம் செய்யப்பட்டது.

இதே நூலாசிரியர் எழுதிய மூன்று பாகங்களைக் கொண்ட நூலில், இது முதற்பாகமாகும். கணிதச் செம்மைப்பாட்டிற்கு அதிக அழுத்தம் கொடாது பௌதிகக் கூறுகளுக்கு அழுத்தம் கொடுத்து காவிப் பகுப்பின் முறைகளையும் உத்திகளையும் நூலாசிரியர் அறிமுகப்படுத்துகிறார். தமிழ் மொழி மூலம் விஞ்ஞான, எந்திரவியற் பட்டப் பரீட்சைகளுக்குத் தோற்ற விருக்கும் மாணவர்கட்கு இந்நூல் பெரிதும் பயன்படும் என நம்பப்படுகிறது.

இந்நூல் கலாநிதி வ. பொன்னையா **Ph. D.** அவர்களால் தமிழில் மொழிபெயர்க்கப்பட்டது.

டபிள்யூ. டி. சி. மகதந்தில,
கல்வி வெளியீட்டு ஆணையாளர்.

கல்வி வெளியீட்டுத் திணைக்களம்,
58, சேர் எணெஸ்ற் த சில்வா மாவத்தை,
கொழும்பு 7
1972. 10. 18.

සංඥපනය

ලංකා විශ්ව විද්‍යාලයේ ගණිතය පිළිබඳ මහාචාර්යව සිටි, දැනට මලයා විශ්ව විද්‍යාලයේ ගණිතය පිළිබඳ මහාචාර්ය ආචාර්ය සී. ජේ. එලියේසර්, එම්.ඒ., පී.එච්.ඩී.(කැන්ටබ) ඩී.විද්‍යා.(එංගලන්තය) විසින් මේ පොත ලියන ලදී. ඉංග්‍රීසි-යෙන් තිබූ අත් පිටපත් පසුව දෙමළට පරිවර්තනය කරන ලදී.

මේ කර්තෘ විසින් ලිවූ කාණ්ඩ තුනෙන් පළමු වැනි කාණ්ඩය මෙය වේ. දෛශික විශ්ලේෂණයේ කාර්මික අදහස් පිළිබඳ මූලික විස්තරයක් කර්තෘ විසින් දී ඇත. ගණිතයට වඩා භෞතික දේ ගැන විශේෂ අවධාරණයක් යොමු කර ඇත.

විද්‍යා සහ ඉංජිනේරු විද්‍යා උපාධි, දෙමළෙන් හදරන ශිෂ්‍යයින්ට මේ පොත බොහෝ ප්‍රයෝජනවත් වේ යයි සිතමි.

දෙස්තර වී. පොන්නයියා පී.එච්.ඩී. විසින් දෙමළ පරිවර්තනය කර ඇත.

ඩබ්. ඩී. සී. මහතන්තිල
කොමසාරිස්
අධ්‍යාපන ප්‍රකාශන දෙපාර්තමේන්තුව.

''ශ්‍රීමතී පාය''
58, සර් අර්නස්ට් ද සිල්වා මාවත,
කොළඹ 7,
1972. 10. 18.

முன்னுரை

காவிப் பகுப்பின் முறைகளையும் நுட்பங்களையும் சுருக்கமாக அறிமுகப் படுத்துவதே இந்நூலின் நோக்கமாகும். கணிதத்திலும், பௌதிகம் எந்திரவியல் போன்ற விஞ்ஞானங்களிலும் இம்முறைகள் இன்றியமை யாதன என இப்போது ஏற்றுக்கொள்ளப்படுகின்றன. முதலிரண்டு அதி காரங்களும் காவி அட்சரகணிதம் பற்றியும், அடுத்த இரண்டு அதிகாரங் களும் காவி நுண்கணிதம் பற்றியும், இறுதி அதிகாரம் சில நியமப் பிரயோகங்கள் பற்றியும் கூறுகின்றன. பௌதிகக் கருத்துக்களை முன் னணியில் நிறுத்தி இலகுவாக விளங்கக்கூடிய எளிய வகையில் விடயத்தை முன்வைப்பதே கணிதக் கடநுட்பத்தைவிட முக்கியமானதாக இந்நூலிலே கொள்ளப்பட்டது. ஒவ்வோர் அதிகாரத்திலும் விளக்க உதாரணங்களும் பயிற்சிகளும் உண்டு. இவற்றுட் பெரும்பாலானவை பழைய பல்கலைக் கழகப் பரீட்சைத்தாள்களிலிருந்து எடுக்கப்பட்டன. கேம்பிறிட்ஜ், இலங்கை, லண்டன், ஒக்ஸ்வோட் பல்கலைக்கழகங்கள் தம் பரீட்சைத் தாள்களைப் பயன்படுத்த அனுமதித்தமைக்காக அவற்றுக்கு என் நன்றி உரியது. பின்வரும் சுருக்கங்கள் உபயோகிக்கப்பட்டுள்ளன.

N. S.	இயற்கை விஞ்ஞானத் திரைப்போசு பாகம் I
P. N. S.	இயற்கை விஞ்ஞானப் பூர்வாங்கம்
M. T.	கணிதத் திரைப்போசு பாகம் I
P. M.	கணிதப் பூர்வாங்கம்
M. T. II.	கணிதத் திரைப்போசு பாகம் II
G.	பொது
G. I.	பொது (பாகம் I)
G. II.	பொது (பாகம் II)
S.	சிறப்பு

இந்நூலாசிரியர் இலங்கைப் பல்கலைக் கழகத்திற் பல்லாண்டுகளாக ஆற்றிவந்த விரிவுரைகளை அடிப்படையாகக் கொண்டது, இந்நூல். இலங்கையிலுள்ள பல்கலைக்கழகங்களில் சிங்களத்திலும் தமிழிலும் கணிதநூல்கள் தேவையாக இருந்தமையே இப்பொருள் பற்றி ஒரு நூலை எழுதுதற்குத் தூண்டுதலாக இருந்த ஆதிக் காரணம். பல்கலைக்கழகங் களிலும் நுண்டொழிற் கழகங்களிலும் கணிதம், பௌதிகம், எந்திர வியல் பயிலும் பிற மாணவர்களுக்கும் பயன்படவேண்டும் என்னும் நோக்கத்துடன் இந்நூல் ஆங்கிலத்திலும் வெளியிடப்பட்டுள்ளது.

உள்ளடக்கம்

அதிகாரம் 1

காவிகளுங் காவிக்கூட்டலும்

1.1. காவிகள்

கணிதமானது விஞ்ஞானவிருத்திக்குச் சிறந்த ஏதுவாய் இருநதது; கணிதபரிபாடை விஞ்ஞான விதிகளைச் சூத்திரித்தறகு அவசியமாயிற்று. எண்கள், சார்புகள், காவிகள், இழுவங்கள், கறங்கிகள், தாயங்கள் என்பன பிரயோக கணிதத்தின் வெவ்வேறு கிளைகளிலுள்ள கணிதப் பொருள்களாகும்.

இந்நூலின்கண் அடங்கிய பிரயோக கணிதப் பகுதியில காவிகள் எனப் படும் பொருளைப் பலமுறையும் வழங்குவோம்; ஆதலால் காவிகள், காவி யட்சர கணிதம் என்பவற்றின் விவரத்தை முதற்றந்து இந்நூலைத் தொடங்குவோம். நாம் கையாளும் பௌதிக கணியங்கள் (a) எண்ணிகள் (b) காவிகள் என்னும் இரண்டு கூட்டங்களாகப் பிரிக்கப்படலாம். ஓர் எண்ணியைத் திட்டமாய் வரையறுத்துக் கூறுதற்கு அதன பருமன் மாத்திரம் வேண்டப்படும்; உதாரணமாக, வெப்பநிலை, திணிவு, அடர்த்தி, கனவளவு என்பன எண்ணிகளாகும். காவிகளைத் திட்டமாய் வரையறுத்துக் கூறுதறகு அவற்றின் பருமனுந் திசையும வேண்டப்படும். விசை, இடப் பெயர்ச்சி, வேகம், ஆர்முடுகல, உந்தம் என்பன காவிகளாகும்.

காவிகள் பலவாறு வகுக்கப்படலாம்; ஒருவகை வகுப்பில் மூன்று காவி வகைகள் உண்டு.

(i) ஓரிடப்படுத்தாத காவி, அல்லது சுயாதீன காவி; இதறகுப பருமனுந் திசையும் உண்டு; எனினும், இதனோடு தொடர்புள்ள திசை யாதொன் றும் வரையறையாய் இல்லை. உ–ம். ஓர் இணையின் திருப்பம்.

(ii) அரக்கும் காவி, அல்லது ஒரு நேர்கோட்டின் வழியே ஓரிடபபடுத்திய காவி. உ–ம். ஒரு விறைப்பான பொருளின்மீது தாக்கும் விசை (ஒரு விசை யானது ஒரு புள்ளியிலே தாக்குவதாக நாம் கூறுகின்றோமாயினும், விசை ஊடுகடத்தப்படுதன்மைத் தத்துவத்தால் அவ்விசையை வரையறுத்துக் கூறுதற்கு வேண்டியது தாக்கக்கோடேயன்றிப் பிரயோகப் புள்ளியன்று).

(iii) பிணித்த காவி, அல்லது ஒரு புள்ளியில் ஓரிடப்படுத்திய காவி உ–ம். மின புலம்.

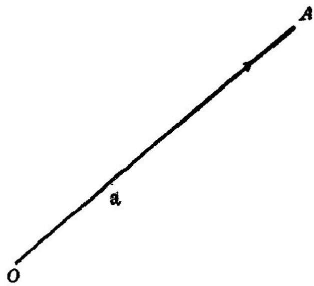
இந்நூலில், ஒரு காவியைப்பற்றிக் கூறுமிடத்து, அதன் வகுப்பைத் தராதுவிடின், அது ஒரு சுயாதீன காவி எனப் பொருள்படும். ஒரே பருமனும் ஒரே திசையுங் கொண்ட இரண்டு காவிகள் சமாந்தர கோடு களின் வழியேயோ ஒரு கோட்டின் வழியேயோ தாக்கினுல், அவை சம மாகவோ சர்வசமமாகவோ இருப்பனவாகக் கொள்ளப்படும்.

திட்டமாய்க் கூறுமிடத்து, பருமனுந் திசையுமுள்ள ஒவ்வொரு கணிய முங் காவியாய் இருக்கவேண்டியதில்லை. காவியானது பருமனுந் திசையுங் கொண்ட கணியமாய் இடப்பெயர்ச்சிகட்குரிய அதே கூட்டல் விதிக்கு, அதாவது கூட்ட **இணைகர விதிக்கு** அமையுமெண வரையறுக்கப்படும். (திசையும் பருமனும் உடையதாய்க் காவியல்லாததாய் இருக்குங் கணியத்திற்கு உதாரணமாக, முடிவுள்ள கோணங்களுக்கூடாகச் சுழலும் ஒரு விறைப்பான பொருளின் சுழற்சிகளைக் கொள்க. இவற்றிற்குப் பருமனுந் திசையுமுண்டு; ஆனால், இவை கூட்டலிணைகர விதிக்கு அமையாவாகையாற் காவிகளாகா.)

காவிகளானவை **a, b, P, Q** போன்ற தடித்த எழுத்துக்களாகிய குறியீடுகளாலாதல, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$ போன்ற அம்புக்குறிகளை மேலேயுள்ள எழுத்துக்களாலாதல் குறிக்கப்படும்.

1.2. காவிகளின் வகைக்குறிப்பு

ஒரு காவியானது திசை கொண்ட கோட்டுத்துண்டு ஒன்றினாற் குறிக்கப் படலாம், அக்கோட்டின் திசை அக்காவியின திசையைக் காட்டும்; அத் துண்டின் நீளம் தக்க அலகளவுத் திட்டத்தில் அக்காவியின் பருமனைக் குறிக்கும். காவிகளின திருத்தமான நிலை பிரதானமன்றாகையாலும், சமாந்தர துண்டுகள சமகாவிகளைக் குறிக்குமாகையாலும் ஒரே உற்பத்தியிலிருநது ("O" இலிருந்து என்க) தொடங்குங் கோட்டுத்துண்டுகளாற் காவிகளை ஒரு படத்தில் குறித்தல் வசதியாகும்.



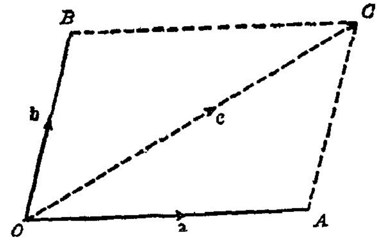
படம் 1

இவ்வாறு $\overrightarrow{OA}$ என்னுந் துண்டு **a** என்னுங் காவியைக் குறிக்கும்; இங்கு, $\overrightarrow{OA}$ யின் திசை **a** எனனுங் காவியின் திசையாகும்; $\overrightarrow{OA}$ என் னும் நீளம், தக்க அலகளவுத் திட்டததில் **a** எனனுங் காவியின் பரும னுக்குச் சமம். **a** என்னுங் காவியின பருமனைச் சரிவெழுத்தில் எழுதிய

a என்னுங் குறியீட்டினுலாதல் $|\mathbf{a}|$ என்னுங் குறியீட்டினுலாதல் நாம் குறிப்போம். $|\mathbf{a}|$ என்பது **a** யின் மட்டு என்றே, சுருக்கமாக " மட்டு **a** " என்றே கூறப்படும்.

1.3. காவிக்கூட்டல்

$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ என்பன முறையே காவிகள் **a, b** என்பனவற்றைக் குறிக்க. OA, OB என்பனவற்றை அடுத்துள்ள விளிம்புகளாயுள்ள $OACB$ என்னும் இணைகரத்தைப் பூரணமாக்குவோம். $\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$; எனின், $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}=\mathbf{b}$, $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$. $\overrightarrow{OC}=\mathbf{c}$ ஆகுக.



படம் 2

$\overrightarrow{OA}$ என்னுங் கோட்டுத் துண்டு O விலிருந்து A யிற்குச் செல்லும் ஒரு துணிக்கையின் இடப் பெயர்ச்சியையும் $\overrightarrow{AC}$ என்பது A யிலிருந்து C யிற்குச் செல்லும் அத்துணிக்கையின் இடப் பெயர்ச்சியையுங் குறிக்கும். தொடர்ச்சியான இவ்விரண்டு இடப் பெயர்ச்சிகளின் விளைவு O விலிருந்து C யிற்குள்ள ஒரு தனியிடப் பெயர்ச்சிக்குச் சமமாகும். ஆயின் நாம் எழுதுவது,

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC},$$

அதாவது
$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{c}. \tag{1}$$

இங்கு, $+$ என்பது காவிக்கூட்டலைக் குறிக்கும்.

இது காவிக்கூட்டலுக்குரிய முக்கோணி நெறி.

இவ்விதியை வேறொருவாறு கூறுவோம் : அதாவது, **a, b** என்னும் இருகாவிகளின் கூட்டுத் தொகை **c** என்னுங் காவியாகும். இக்காவி OA, OB என்பனவற்றை அடுத்துள்ள விளிம்புகளாயுள்ள இணைகரத்தின்

மூலை விட்டமாகிய OC யினுற் குறிக்கப்படும். நாம் எழுதுவது

$$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC},$$

அதாவது $$\mathbf{b}+\mathbf{a}=\mathbf{c}.$$

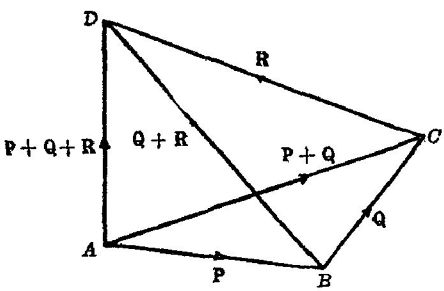
நாம் காணபது

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a} \tag{2}$$

இது **காவிக்கூட்டல் பரிவர்த்தனை விதிக்கு** அமையுமென்றும் அக்கூட்டலொழுங்கு ஒன்ருேடொன்று மாற்றப்படலாமென்றுங் காட்டும்.

கூட்டலின் **தொகுப்பு விதியையும்** எடுத்து நோக்குவோம். **P, Q, R** எனனும மூன்று காவிகளை எடுத்து முறையே $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ என்பன வற்ருற் குறிப்போம்.

P + Q, Q + R என்பனவற்றை அமைக்க; அதன்பின **(P + Q) + R, P + (Q + R)** எனபனவறறை அமைக்க.



படம் 3

$$(\mathbf{P}+\mathbf{Q})+\mathbf{R}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}.$$

$$\mathbf{P}+(\mathbf{Q}+\mathbf{R})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}.$$

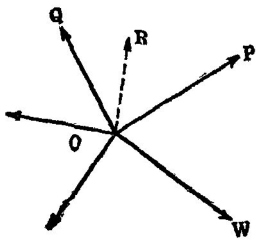
எனின், $$(\mathbf{P}+\mathbf{Q})+\mathbf{R}=\mathbf{P}+(\mathbf{Q}+\mathbf{R}) \tag{3}$$

ஆகவே, செயகையொழுங்கைக காட்ட வழங்கிய அடைபபுக்கள் தவிர்க்கப்படலாம்; ஒவ்வொரு பக்கத்திலுமுள்ள கூட்டுத்தொகை

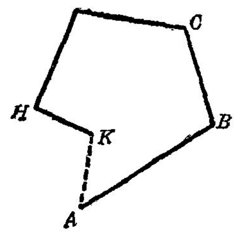
$$\mathbf{P}+\mathbf{Q}+\mathbf{R}$$

என எழுதப்படலாம். இம்முடிபு **P, Q, . . . , W** என்னும் எத்தொகையான காவிகளின் கூட்டுத் தொகையையும் வரையறுத்தற்கு விரிக்கப்படலாம்.

ஒரு வரிப்படத்தில்,—படம் 4(a) – O என்னும் ஓர் உற்பத்தியிலிருந்து வரையப்படும் **P, Q,** ..., **W** என்னும் காவிகளைக் காட்டுகின்றனவெனக் கொள்க. $AB....K$ என்னும் ஒரு பல்கோணியை வரைவோம்.



படம் 4 (a)



படம் 4 (b)

இதில், காவிகள் தொடர்ச்சியாக இடப்பட்ட $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, ..., $\overrightarrow{HK}$ என்னுந் திசைகொண்ட துண்டுகளால் தக்க அளவுத்திட்டத்திற் குறிக்கப்பட்டுள்ளன. இங்கு, $\overrightarrow{AB}=\mathbf{P}$, $\overrightarrow{BC}=\mathbf{Q}$, ... $\overrightarrow{HK}=\mathbf{W}$.

AK ஐத் தொடுக்க. எனின், $\overrightarrow{AK}$ என்பது அதே அளவுத்திட்டத்தில் $\mathbf{P}+\mathbf{Q}+\ldots+\mathbf{W}$ என்னுங் காவிக்கூட்டுத் தொகையைக் குறிக்கும். அக்கூட்டுத்தொகை **R** என்பதாற் குறிக்கப்படின், $\mathbf{R}=\overrightarrow{AK}$.

R என்பது **விளையுட் காவி** எனப்படும்; **P, Q,...** என்பன **R** இன் கூறுகளெனப்படும்.

1.4. $-\mathbf{a}$, $\mathbf{O}$, $\lambda\mathbf{a}$

$-\mathbf{a}$ என்னுங் குறியீடு **a** இற்குப் பருமனுற் சமனுயுந் திசையால் எதிராயுள்ள ஒரு காவியைக் காட்டுதற்கு வழங்கப்படும். $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$ எனின், $\overrightarrow{BA}=-\mathbf{a}$.

முனைப்புள்ளிகள் ஒன்றுபடும் ஒரு காவி சூனியக்காவி எனப்படும்; அது **O** எனனுங் குறியீட்டினுற் குறிக்கப்படும். நாம் காண்பது

$$\mathbf{a}+(-\mathbf{a})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\mathbf{O} \qquad (4)$$

அன்றியும்,

$$\mathbf{a}+\mathbf{O}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}. \qquad (5)$$

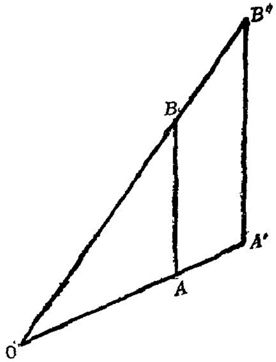
காவிகள் **a**, $-\mathbf{b}$ என்பனவற்றின் கூட்டுத்தொகை, அதாவது $\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$ என்பது $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ என எழுதப்படலாம். படம் (2) இல், $\overrightarrow{BO}=-\mathbf{b}$, $\mathbf{a}+(-\mathbf{b})=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BA}$ இணைகரவிதியால். எனின், $\overrightarrow{BA}$ ஆனது $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ என்பதைக் குறிக்கும்.

λ என்பது ஒரு நேரெண்ணும் **a** எனபது ஒரு காவியாயும் இருந்தால, $\lambda\mathbf{a}$ என்பது **a** யின் திசையும் அதுபோல் λ மடங்கு பருமனுமுள்ள காவியென வரையறுக்கப்படும். $\overrightarrow{OA}$ என்பது **a** ஐயும், $\overrightarrow{OA'}$ என்பது $\lambda\mathbf{a}$ ஐயுங் குறித்தால, O, A, A' என்னும் புள்ளிகள் ஒரு கோட்டிற் கிடக்கும ; அவற்றின் தூரங்கள் $OA'/OA=\lambda$ ஆகுமாறு இருக்கும்.

ஒரு காவியை ஓர் எண்ணுற் பெருக்கும் இப்பெருக்கம் **பங்கீட்டு விதிக்கு** அமையும் ; அதாவது

$$\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})=\lambda\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b} \tag{6}$$

இது இயல்பொத்த முக்கோணிகளின் உடைமைகளை உபயோகித்து வாய்ப புப் பார்க்கப்படலாம்.



படம் 5

$\overrightarrow{OA}=\mathbf{a}$ ஆயும், $\overrightarrow{AB}=\mathbf{b}$ ஆயும் இருக்க ; எனின், $\overrightarrow{OB}=\mathbf{a}+\mathbf{b}$.

A', B' என்பன $OA'/OA=OB'/OB=\lambda$ ஆகுமாறு இருக்க.

எனின், $A'B'$ என்பது AB யிற்குச் சமாந்தரம் ; OAB, $OA'B'$ என்னும் இரு முக்கோணங்களும் இயல்பொத்தவை.

$\overrightarrow{OA'}=\lambda\mathbf{a}$, $\overrightarrow{A'B'}=\lambda\mathbf{b}$, $\overrightarrow{OB'}=\lambda\overrightarrow{OB}=\lambda(\mathbf{a}+\mathbf{b})$.

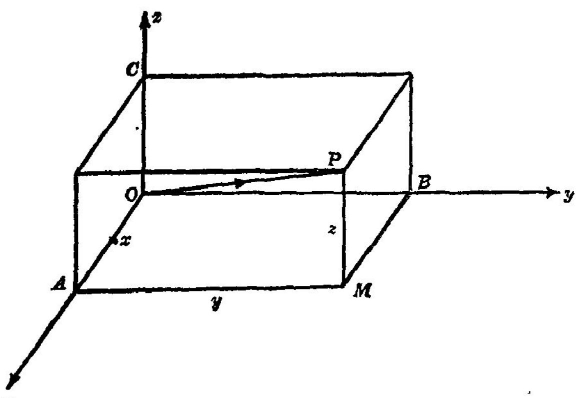
அன்றியும், $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'B'} = \lambda \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}.$

எனின், நாம் சமன்பாடு (6) ஐப் பெறுவோம்.

காவிகளின் கூட்டல் கழித்தல் விதிகளுள் காவிகளை ஓர் எண்ணாற் பெருக்குதற்குரிய பெருக்கல் விதியும் பொதுவட்சரகணித விதிகளோடு இசைதலைக் காண்கின்றோம்.

1.5. காவித் துணிப்பு

Ox, Oy, Oz என்பன ஒன்றுக்கொன்று செங்கோணங்களிலுள்ள மூன்று கோடுகளாகுக. இககோடுகளை டெக்காட்டின செங்கோணவாள்கூற்றுத் தொகுதியொன்றின் மூன்று அச்சுககளாகப் பயன்படுத்தலாம்.



படம் 6

தந்த ஒரு புள்ளி P யிலிருந்து PM எனபதை xy தளத்திற்கு (அதாவது, Ox, Oy என்னும் அச்சுக்களைக் கொண்ட தளத்திற்குச்) செங்குத்தாய் வரைக. MA யை Ox இற்குச் செங்குத்தாய் வரைக. $OA = x$, $AM = y$, $MP = z$ ஆகுக. படத்திற் காட்டியபடி x, y, z என்னும் நீளங்களுள்ள பக்கங்களைக் கொண்ட செவ்வகத் திண்மத்தைப் பூரணமாக்குக. OA, OB, OC —அவையாவன x, y, z என்பன—முறையே அம்மூன்று அச்சுக்களின் மீதுள்ள OP யின் எறியங்கள். x, y, z என்பன புள்ளி P யின் ஆள்கூறுகளெனப்படும்.

காவி முறைப்படி,

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MP}$$
$$=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}.$$

$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ என்பன $\overrightarrow{OP}$ யின் கூறுகள்.

$\overrightarrow{OP}$ என்னும் ஒரு காவி $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ போன்ற ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான மூன்று கூறுகளாகத துணிக்கப்படும்போது (அல்லது OP யானது தளம் AOB யில் இருக்குமிடத்து $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ என்னும் இரண்டு செஙகுத்துக் கூறுகளாகப் பிரிக்கப்படும்போது) ஒவ்வொரு கூறும் உரிய திசையில் அக்காவியின் **துணித்த பகுதி** யென்றுதல் **துணிசல்** என்றுதல் கூறப்படும்.

அம்மூன்று அச்சுக்களின் தளத்திற்கு மூன்று அலகுக் காவிகளுக்கும் (அதாவது, அலகுப் பருமனுள்ள காவிகளுக்கும்) ஒரு குறியீடு இடல் வசதியாகும். **i**, **j**, **k** என்பன முறையே $x-$, $y-$, $z-$ என்னும் அச்சுக்களின் நீளத்திற்கு அலகுக் காவிகளைக் குறிக்க. எனின், $\overrightarrow{OA}=x\mathbf{i}$, $\overrightarrow{OB}=y\mathbf{j}$, $\overrightarrow{OC}=z\mathbf{k}$ என்பன அம் மூன்று அச்சுக்களின் நீளத்திற்கு $\overrightarrow{OP}$ யின் துணிசல்களாகும். $\overrightarrow{OP}$ ஆனது உற்பத்தி O பற்றிப் புள்ளி P யின் **நிலைக்காவி** எனப்படும்; அன்றி, தனியே P யின் **நிலைக்காவி** யென்றுங் கூறப்படும். $\overrightarrow{OP}$ ஐ **r** ஆற் குறிப்போமாயின,

$$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}. \tag{7}$$

அன்றியும், $OP^2=OA^2+AP^2$ (OA, AP என்பன செங்கோணங்களி லிருததலால்)

$$=OA^2+AM^2+MP^2.$$

எனின்,
$$|\mathbf{r}^2|=x^2+y^2+z^2. \tag{8}$$

OP யானது மூன்று அச்சுக்களோடும் முறையே α, β, γ என்னும் கோணங்களை ஆக்கினுல், கோசை α, கோசை β, கோசை γ என்பன OP யின் **திசைக் கோசைன்கள்** எனப்படும்.

$x=r$ கோசை α, $y=r$ கோசை β, $z=r$ கோசை γ என்றும் OP யின் திசைக் கோசைனகள் x/r, y/r, z/r என்றுங் காண்போம்.

மூன்று அச்சுக்களின் மீதும் ஒரு காவி **a** யின் எறியங்கள் a_x, a_y, a_z எனக் கொள்க. a_x, a_y, a_z என்பன எண்கள். அவ்வெறியஙகள் பருமன் திசைகள் பற்றி $a_x\mathbf{i}$, $a_y\mathbf{j}$, $a_z\mathbf{k}$ என்பனவற்றுற் குறிக்கபபடலாம். எனின்,

$$\mathbf{a}=a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k} \tag{9}$$

மூன்று அச்சுக்களின் வழியேயும் அப்பிரிவுகளின் பருமன்கள்

$$a_x = |\mathbf{a}| \text{ கோசை } (\mathbf{a}, x),\ a_y = |\mathbf{a}| \text{ கோசை } (\mathbf{a}, y),\ a_z = |\mathbf{a}| \text{ கோசை } (\mathbf{a}, z)\ ; \quad (10)$$

இங்கு, $(\mathbf{a}, x)$ என்பது காவி $\mathbf{a}$ இற்கும் x – அச்சுக்கும் இடையிலுள்ள கோணத்தைக் குறிக்கும். அன்றியும், அக்காவியின் பருமன்

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)}; \quad (11)$$

$\mathbf{a}$ இன் திசைக் கோசைன்கள்

$$\left(\frac{a_x}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_y}{|\mathbf{a}|}, \frac{a_z}{|\mathbf{a}|}\right) \quad (12)$$

ஒரு காவி $\mathbf{a}$ இற்கு (a_x, a_y, a_z) என்னும பிரிவுகளும, $\mathbf{b}$ இறகு (b_x, b_y, b_z) என்னும பிரிவுகளும் இருந்தால்,

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}.$$

சமனபாடுகள் (3), (6) எனபனவற்றின் விதிகளை வழங்க நாம் பெறுவது

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_x + b_x)\,\mathbf{i} + (a_y + b_y)\,\mathbf{j} + (a_z + b_z)\mathbf{k} \quad (13)$$

யாதுமொரு திசையில் $(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ இன் துணித்த பகுதி அதே திசையில் $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ என்பனவற்றின் துணித்த பகுதிகளின் கூட்டுத் தொகையாகும் என்னும் விதியால் காவிகள் கூட்டப்படலாம் என்பதை இது காட்டும்.

எடுத்துக்காட்டு. A, B எனனும் புள்ளிகளின நிலைக்காவிகள்

$$\mathbf{a} = a_1\,\mathbf{i} + a_2\,\mathbf{j} + a_3\,\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = b_1\,\mathbf{i} + b_2\,\mathbf{j} + b_3\mathbf{k} \text{ என்பன.}$$

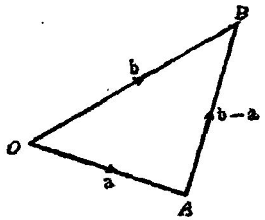
காவி $\overrightarrow{AB}$ யையும், AB யின நீளத்தையும் AB யின் திசைக் கோசைன களையுங் காண்க.

O என்பது உறபத்தியாயும் $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$ ஆயுமிருக்க,

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = (-\mathbf{a}) + \mathbf{b} = \mathbf{b} - \mathbf{a}.$$

$r = AB$ இன் நீளம்

$$= |\mathbf{b} - \mathbf{a}| = \sqrt{[(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2]}.$$



படம் 7

AB யின் திசைக் கோசைன்கள் $\frac{b_1-a_1}{r}, \frac{b_2-a_2}{r}, \frac{b_3-a_3}{r}$ என்பன.

1.6. AB யை $m : n$ என்னும் விகிதத்திற் பிரிக்கும் புள்ளி

a, **b** என்பன A, B என்னும் இரண்டு புள்ளிகளின் நிலைக் காவிகளாயின், AB யை $m : n$ என்னும் விகிதத்திற் பிரிக்கும் புள்ளி R இற்கு

$$\mathbf{r} = \frac{n\mathbf{a}+m\mathbf{b}}{n+m} \tag{14}$$

என்னும் நிலைக்காவி உண்டு.

நிறுவல் : $\overrightarrow{AR} = \mathbf{r}-\mathbf{a}$, $\overrightarrow{RB} = \mathbf{b}-\mathbf{r}$.

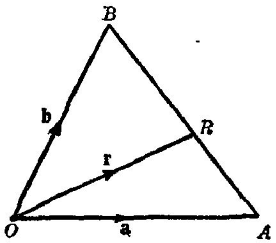
$AR/RB = m/n$ ஆயிருக்க, AR, RB என்பன ஒரே திசையிலிருத்தலால்,

$$n\,\overrightarrow{AR} = m\,\overrightarrow{RB}.$$

எனின்,

$$n(\mathbf{r}-\mathbf{a}) = m(\mathbf{b}-\mathbf{r})$$

$$\mathbf{r} = \frac{n\mathbf{a}+m\mathbf{b}}{m+n}.$$



படம் 8

ஒரு சிறப்பு வகையாக, AB யின் நடுப்புள்ளியின் நிலைக் காவி

$$\tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}) \tag{15}$$

எனப் பெறுவோம்.

எடுத்துக்காட்டு **a**, **b**, **c** எனபன ஒரு முக்கோணியின் A, B, C எனனும் உச்சிகளின் நிலைககாவிகளாயின் அம்முககோணியின் மையபபோலி

$$\tfrac{1}{3}(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}) \tag{16}$$

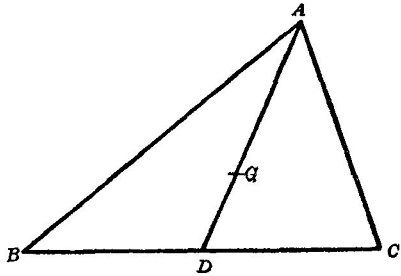
என்னும் நிலைககாவி உண்டெனக் காட்டுக.

D என்பது BC யின் நடுப்புள்ளியாயின், மையப்போலி G ஆனது AD ஐ $2:1$ என்னும் விகிதத்திற் பிரிக்கும்.

D இன் நிலைக்காவி $\frac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{c})$ ஆகும்.

சூத்திரம் (14) ஐ வழங்க, G இற்கு நிலைக்காவி

$$\frac{1.\,\mathbf{a}+2.\,\frac{(\mathbf{b}+\mathbf{c})}{2}}{1+2}=\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}}{3}$$ என்பதே.



படம் 9

1.7. n புள்ளிகளின் மையப்போலி அல்லது இடைமையம்

$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$ என்னும் நிலைக்காவிகளையுடைய $A_1, A_2, \ldots, A_n$ என்னும் n புள்ளிகள் தரப்படின், அவற்றின் **மையப்போலி** அல்லது **இடை நிலை மையம்**

$$\bar{\mathbf{r}}=\frac{1}{n}(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\ldots+\mathbf{r}_n) \tag{17}$$

என்னும் நிலைக்காவியைக் கொண்ட புள்ளி G என வரையறுக்கப்படும். $m_1, m_2, \ldots, m_n$ என்பன n மெய்யெண்களாயின்

$$\bar{\mathbf{r}}=\frac{m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2+\ldots+m_n\mathbf{r}_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}=\frac{\sum m\mathbf{r}}{\sum m} \tag{18}$$

என்னும் நிலைக்காவியையுடைய புள்ளி G ஆனது முறையே $m_1, m_2, \ldots, m_n$ என்னும் எண்களோடு தொடர்புபட்ட $A_1, A_2, \ldots, A_n$ என்னுந் தந்த புள்ளிகளின் மையப்போலி என வரையறுக்கப்படும். அப்புள்ளி **நிறையேற்றிய இடைமையம்** எனப்படும்; $m_1, m_2, \ldots, m_n$ என்பன **தொகுத்த நிறைகளாகும்.**

A, B என்னும் இரண்டு புள்ளிகளுக்கு முறையே n, m என்னும் நிறைகள் தொடர்புபட்டிருப்பின் AB யை $m : n$ என்னும் விகிதத்திற் பிரிக்கும் புள்ளியானது மையப்போலியாகும்.

(சமனபாடு (14) ஒடு ஒப்பிடுக)

திணிவு மையமானது காவிகளை வரையறுத்தலில் வழங்கப்படுஞ் சிறப்புற பத்தி O ஐச் சாராதென நாம் காட்டல் கூடும்.

O' என்பது O பற்றித் தன் நிலைக்காவி $\mathbf{a}$ ஆயுள்ள ஒரு புள்ளியாகுக. O' உற்பத்தியாக அதுபற்றி $A_1, A_2, \ldots, A_n$ என்பனவற்றின் நிலைக்காவிகள் $\mathbf{r}_1-\mathbf{a}, \mathbf{r}_2-\mathbf{a}, \ldots, \mathbf{r}_n-\mathbf{a}$ என்பனவாகும் ; எனின், மையப்போலி G' ஆனது

$$\overrightarrow{O'G'}=\frac{m_1(\mathbf{r}_1-\mathbf{a})+m_2(\mathbf{r}_2-\mathbf{a})+\ldots+m_n(\mathbf{r}_n-\mathbf{a})}{m_1+m_2+\ldots+m_n}$$

$$=\frac{m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2+\ldots+m_n\mathbf{r}_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}-\mathbf{a}$$

$$=\overrightarrow{OG}-\mathbf{a}=\overrightarrow{O'G'}.$$

என்பதால் வரையறுககப்படும்.

எனின், G, G' என்பன ஒன்றுபடும் ; இது மையப்போலியானது உற்பத்தித் தேர்வைச் சாராது நிற்கும் என்பதைக் காட்டும்.

ஒரு வளையி, பரப்பளவு, கனவளவு என்பனவற்றுள் எதன் திணிவு மையமும் அதனை ஒரு பெரிய n அளவான சிறு மூலகங்களாகப் பிரித்து, அம்மூலகம் ஒவ்வொன்றிற்கும் முறையே விகிதசமமான தொடர்புபட்ட எணகளோடு கூடிய மையப்போலியைக் கண்டு, n ஆனது வரையறையின்றிக் கூடுதலுற ஒவ்வொரு மூலகமும் ஒரு புள்ளியை அணுக எல்லையுறும் நிலையைக் காணுதலால் வரையறுககப்படலாம்.

$$\text{இவ்வாறு } \bar{\mathbf{r}}=\frac{\text{எல் }\sum \mathbf{r}\delta s}{\text{எல் }\sum \delta s}=\frac{\int \mathbf{r}ds}{\int ds} \text{ ஒரு வளையிக்கு,} \tag{19}$$

$$\frac{\int \mathbf{r}dA}{\int dA} \text{ ஒரு பரப்பளவிற்கு, } \frac{\int \mathbf{r}dv}{\int dv} \text{ ஒரு கனவளவிற்கு.}$$

எடுத்துக்காட்டு 1. சமன்பாடு (18) இனல் வரையறுக்கப்படும் மையப்போலி G ஆனது

$$m_1\overrightarrow{A_1G}+m_2\overrightarrow{A_2G}+\ldots+m_n\overrightarrow{A_nG}=0 \tag{20}$$

என்னுந் தொடர்பைத் திருப்தியாக்குமெனக் காட்டுக.

G இற்கு நிலைக்காவி $\bar{\mathbf{r}}$ எனின், $\overrightarrow{A_1G}=\bar{\mathbf{r}}-\mathbf{r}_1$, $\overrightarrow{A_2G}=\bar{\mathbf{r}}-\mathbf{r}_2, \ldots.$

(20) இன் இடக்கைப்பக்கம்

$$m_1(\bar{\mathbf{r}}-\mathbf{r}_1)+m_2(\bar{\mathbf{r}}-\mathbf{r}_2)+\ldots+m_n(\bar{\mathbf{r}}-\mathbf{r}_n)$$
$$=(m_1+m_2+\ldots+m_n)\,\bar{\mathbf{r}}-(m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2+\ldots m_n\mathbf{r}_n)$$
$$=\mathbf{0},$$ சமன்பாடு (18) ஐ வழங்குமிடத்து.

எடுத்துக்காட்டு 2. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ என்னும் புள்ளிகளும் $m_1, m_2, \ldots, m_n$ என்னுந் தொடர்புபட்ட எண்களுந் தரப்பட்டால், G என்னும் ஒரு புள்ளி பின்வரும் முறையால் வரையறுக்கப்படும் :—$m_1A_1G_1=m_2G_1A_2$ ஆகுமாறு A_1A_2 ஐ G_1 இற் பிரிக்க. பின்னர், $(m_1+m_2)\,G_1G_2=m_3G_2A_3$ ஆகுமாறு G_1A_3 ஐ G_2 இற் பிரிக்க. $A_4, A_5, \ldots, A_n$ என்னும் புள்ளிகளைத் தொடர்ச்சியாக $G_3, G_4, \ldots, G_{n-1}$ என்னும் புள்ளிகளைப் பெறும் முறையைத் தொடருக. பெற்ற ஈற்றுப்புள்ளி, அதாவது G_{n-1} ஆனது G எனப்படின் G ஆனது சமன்பாடு (18) ஐத் திருப்தியாக்குமெனக் காட்டுக.

G_1 ஆனது A_1A_2 ஐ $m_2 : m_1$ என்னும் விகிதத்திற் பிரிக்கின்றமையால் அதன் நிலைக்காவி $(m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2)/(m_1+m_2)$ ஆகும். G_2 ஆனது G_1A_3 ஐ $m_3 : (m_1+m_2)$ என்னும் விகிதத்திற் பிரிக்கின்றமையால், அதன் நிலைக் காவி

$$\frac{(m_1+m_2)\,\dfrac{(m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2)}{m_1+m_2}+m_3\mathbf{r}_3}{(m_1+m_2)+m_3}=\frac{m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2+m_3\mathbf{r}_3}{m_1+m_2+m_3},$$

இவ்வாறு தொடர்ந்து செல்ல நாம் (18) ஐத் தாபிக்கின்றோம். சூத்திரம் (18) இலுள்ள சமச்சீரானது G_1, $G_2, \ldots,$ G_{n-1} என்னும் புள்ளிகளின் தொடர்ச்சியை ஆக்குதற்கு எடுக்கப்பட்ட வேறு வேறு புள்ளிகளின் ஒழுங்கை G என்னும் புள்ளி சாராது நிற்குமென்பதைக் காட்டும்.

எடுத்துக்காட்டு 3. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ என்னும் புள்ளிகளும் $m_1, m_2, \ldots, m_n$ என்னுந் தொடர்புபட்ட எண்களுந் தரப்பட்டால், $m_1+m_2+\cdots+m_n\neq 0$ என்னுமிடத்து,

$$m_1\overrightarrow{A_1G}+m_2\overrightarrow{A_2G}+\ldots+m_n\overrightarrow{A_nG}=\mathbf{0} \qquad (20)$$

என்னுந் தொடர்பினுல் வரையறுக்கப்படும் G என்னும் ஒரு புள்ளி ஒருதனியானதெனக் காட்டுக.

இத்தொடர்பைத் திருப்தியாக்கும் G' என்னும் வேறொரு புள்ளி உண்டெனக் கொள்க.

எனின்,
$$m_1\overrightarrow{A_1G'}+m_2\overrightarrow{A_2G'}+\ldots+m_n\overrightarrow{A_nG'}=\mathbf{0}. \qquad (21)$$

(20) ஐ (21) இலிருந்து கழிக்க, நாம் பெறுவது

$$(m_1+m_2+\ldots+m_n)\,\overrightarrow{GG'}=\mathbf{0}\;;$$

$m_1+m_2+\ldots+m_n\neq 0$ எனின், G, G' என்பன ஒன்றுபடும் என பதை இது காட்டும். எனின, G என்பது ஒருதனியானது.

$m_1+m_2+\ldots+m_n=0$ என்னும் வகையானது முடிவுள்ள தூரத்தில் மையப்போலியில்லாமையால் அசாதாரணமானது.

இவ்வாறு, தொடர்புபட்ட நிறைகளோடு கூடிய புள்ளிகளின் தொகுதியொன்றின் மையப்போலி G ஆனது சமன்பாடு (18) ஆலாதல் சமன்பாடு (20) ஆலாதல் எடுத்துக்காட்டு (2) இலுள்ள அமைப்பாலாதல் வரையறுக்கப்படலாம்.

பயிற்சி I

1. G ஆனது ஒரு முக்கோணி ABC யின மையபபோலியாயிருக்க O வானது யாதுமொரு புள்ளியாயின்,

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\mathbf{0},$$

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG},$$

எனக் காட்டுக.

2. λ, μ என்பன எண்ணிக் கணியங்களாயிருகக, C யானது AB யை $\mu : \lambda$ என்னும் விகிதததிற பிரிக்குமிடத்து

$$\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}=(\lambda+\mu)\overrightarrow{OC}$$

எனக் காட்டுக.

3. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ என்பன C எனனும் மையத்தையுடைய ஒரு வட்டததின் பரிதியை n சம பகுதிகளாகப பிரிக்கும் n புளளிகள. O எனபது யாதுமொரு புள்ளியாயின,

$$\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+\ldots+\overrightarrow{OA_n}$$

எனபதைச் சுருக்குக.

4. ஒரு சதுரமுகியின மூனறு அடுத்துள முகங்களின ஒரேயுசசிககூடாகச் செல்லும மூலைவிட்டங்களாற் குறிககப்படும் மூன்று காவிகளின கூட்டுத தொகையையுங் காண்க.

5. ABC என்னும் ஒரு முக்கோணியின சுற்றுமையம் O ஆயுஞ் செங்குத்துமையம் H ஆயுமிருந்தால்,

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH},$$

$$\overrightarrow{HA}+\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}=2\overrightarrow{HO},$$

$$\overrightarrow{HA}\ \text{தான்}\ A+\overrightarrow{HB}\ \text{தான}\ B+\overrightarrow{HC}\ \text{தான}\ C=\mathbf{0}$$

எனக் காட்டுக.

6. பின்வருவனவற்றின் மையப்போலியைக் காணக :

(a) $\mathbf{i}, 2\mathbf{i}, 3\mathbf{i}, \ldots, n\mathbf{i}$ என்னும் n புள்ளிகள்

(b) $\mathbf{i}, 2\mathbf{i}, \ldots, n\mathbf{i}, \mathbf{j}, 2\mathbf{j}, \ldots, n\mathbf{j}$ என்னும் $2n$ புள்ளிகள.

7. G ஆனது $m_1, m_2, \ldots, m_n$ எனனுந் தொகுதத நிறைகளோடு கூடிய $A_1, A_2, \ldots, A_n$ என்னும் புள்ளிகளின் மையப்போலியாயிருக்குமிடத்து $m_1\overrightarrow{OA_1}, m_2\overrightarrow{OA_2}, \ldots, m_n\overrightarrow{OA_n}$ என்னும் n காவிகளின கூட்டுத்தொகை $(m_1+m_2+\ldots+m_n)\overrightarrow{OG}$ எனக் காட்டுக.

(லைபினிற்சின் தேற்றம்)

8. ஒரு நான்முகியின எதிர்ப்பக்கங்களின நடுப்புள்ளிகளைத தொடுக்குமமூன்று நேர்கோடுகளும சந்தித்து, ஒன்றையொன்று இருகூறிடுகின்றன என்று, காவிகளைப பயன்படுததிக் காட்டுக.

9. A, B, C என்னும் மூன்று புள்ளிகளின் நிலைக்காவிகள **a**, **b**, **c** என்பன ; தன் நிலைக்காவி

$$\mathbf{d} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} + \nu\mathbf{c}$$

ஆயுள்ள புள்ளி D ஆனது A, B, C என்பனவற்றேடு ஒரு தளமாகுமாறுள்ள நிபந்தனையைக் காண்க.

AB, CD என்பன E இலும், AC, BD என்பன F இலுஞ் சந்தித்தால், E, F என்பனவற்றின் நிலைக்காவிகளைக் காண்க. AD, EF என்பன ஒன்றையொன்று வெட்டும் புள்ளிக்கு

$$\frac{1}{1+\lambda}(\lambda\mathbf{a} + \mathbf{d})$$

என்னும் நிலைக்காவி உண்டெனக் காட்டுக. [Camb. N. S. 1954]

10. **a**, **b**, **c** என்பன $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ என்னுங் காவிகளாகும்.

$$\alpha + \beta + \gamma = 0,\ \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c} = \mathbf{0}$$

ஆகுமாறு எல்லாம் பூச்சியமல்லாத α, β, γ என்னும் எண்கள உண்டெனின், A, B, C என்பன ஒரு தளமானவையெனக் காட்டுக.

மறுதலை முடிபைக் கூறி நிறுவுக. [Camb. P. N. S. 1954]

அதிகாரம் 2

காவிகளின் பெருக்கங்கள்

2.1. எண்ணிப் பெருக்கம்

a, b எனனும் இரண்டு எண்கள் தரப்பட்டால், அவற்றின் பெருக்கம் ab ஐ நாம் ஆக்கல் முடியும். ஆனுல், **a**, **b** எனனும் இரண்டு காவிகள் தரப்பட்டால், **ab** போன்ற ஒரு கோவைக்கு வெளிப்படையான யாதொரு பொருளுங் கொடுத்தல் இயலாது. எனினும், காவிகளின் சில பெருக்கங்களேச் சில சிறப்பான கருத்துக்கள் கொணடு வரையறுத்தல் முடியும் ; இப்பெருக்கங்கள் காவிக் கொள்கையின மதிப்பைக் கூட்டும் பல்வேறு பிரயோகங்களே உடையனவாகும்.

a, **b** எனனும் இரணடு காவிகள் தரப்பட்டவிடத்து $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ ஆகுமாறு எடுக்கப்பட்ட இந்த இரணடு காவிகளின் திசைகளுக்கு இடையிலுள்ள கோணம் θ எனக் கொள்க. **a**, **b** என்னும் இந்த இரண்டு காவிகளின் **எண்ணிப் பெருக்கம்**, அல்லது **உட்பெருக்கம்**

$$|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \text{ கோசை } \theta \tag{1}$$

என்னுங கணியமெனை வரையறுக்கப்படும்.

இக்கணியம் **a.b** எனக் குறிக்கப்படும் ; இது "**a** குத்து **b**" எனக கூறப்படும் எணணிப் பெருக்கமானது திசையில்லாத எண்ணிக கணியமாகும். அது θ வானது கூர்ஙகோணமாயிருக்குமிடத்து நேராயும் θ வானது விரிகோணமாயிருக்குமிடத்து மறையாயும் $\theta=\frac{\pi}{2}$ ஆயிருக்குமிடத்து பூச்சிய மாயும் இருககும்.

மறுதலேயாக, $\mathbf{a}.\mathbf{b}=0$ எனின், (2)

$\mathbf{a}=\mathbf{0}$ எனறுதல், $\mathbf{b}=\mathbf{0}$ எனறுதல் **a**, **b** எனபன செங்குததாகும என்றுதல் நாம அனுமானிக்கலாம்.

a.b என்பதன் வரைவிலக்கணத்திலிருந்தும் பொதுப் பெருக்கலின் மாற்று விதியிலிருந்தும் நாம் காண்பது

$$\mathbf{b}.\mathbf{a}=\mathbf{a}.\mathbf{b} \tag{3}$$

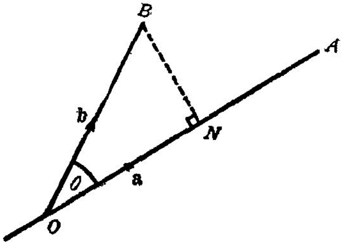
அதாவது, எண்ணிப் பெருக்கம் மாற்று விதிக்கு அமையும்.

a யின் திசையில் **b** யின் கூறு கூறு $_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ என்பதாற் குறிக்கப்படும. அதன் பெறுமானம் $|\mathbf{b}|$ கோசை θ ஆகும். OA யின் மீது OB யின் எறியமாகிய ON இன் நீளத்திற்குச் சமன். இந்நீளம் **a** யின் திசையில் $\overrightarrow{ON}$ இருக்குமிடதது நேராயும் **a** யிற்கு எதிர்த்திசையில் $\overrightarrow{ON}$ இருக்குமிடத்து

மறையாயுமிருக்கும். இது எண்ணிப் பெருக்கம் பற்றி கூறு$_{\mathbf{a}}$ $\mathbf{b} = \mathbf{a}.\mathbf{b}/|\mathbf{a}|$ என உணர்த்தப்படலாம்.

$$\mathbf{a}.\mathbf{b} = |\mathbf{a}| \text{ கூறு}_{\mathbf{a}}\, \mathbf{b} = |\mathbf{b}| \text{ கூறு}_{\mathbf{b}}\, \mathbf{a} \tag{4}$$

என்றும் எழுதலாமென் நாம் அறிவோம்.



படம் 1

தன் அலகுக் காவி $\mathbf{u}$ ஆயுள்ள ஒரு திசையில் ஒரு காவி $\mathbf{a}$ யின் கூறு $\mathbf{a}.\mathbf{u}$ ஆகும்.

$\mathbf{a}.\mathbf{a}$ என்னுங் குறியீட்டைக் குறித்தற்கு $\mathbf{a}^2$ என்னுங் குறியீட்டை நாம் வழங்கலாம். நாம் காண்பது

$$\mathbf{a}^2 = |\mathbf{a}|^2. \tag{5}$$

$\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ என்பன மூவச்சுக்களின் வழியேயும் உள்ள அலகுக்காவிகளெனின்,

$$\left.\begin{array}{lll} \mathbf{i}.\mathbf{i} = 1, & \mathbf{i}.\mathbf{j} = 0, & \mathbf{i}.\mathbf{k} = 0 \\ \mathbf{j}.\mathbf{i} = 0, & \mathbf{j}.\mathbf{j} = 1, & \mathbf{j}.\mathbf{k} = 0 \\ \mathbf{k}.\mathbf{i} = 0, & \mathbf{k}.\mathbf{j} = 0, & \mathbf{k}.\mathbf{k} = 1 \end{array}\right\} \tag{6}$$

λ என்பது ஓர் எண்ணெனின்,

$$(\lambda\mathbf{a}).\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}.\mathbf{b} = \mathbf{a}.(\lambda\mathbf{b}) \tag{7}$$

பெருக்கலின் பங்கீட்டு விதி எண்ணிப் பெருக்கங்களுக்கு உண்மையாகும்.

அதாவது $$\mathbf{a}.(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}.\mathbf{b} + \mathbf{a}.\mathbf{c}. \tag{8}$$

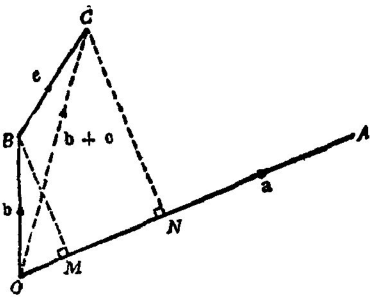
படம் 2 இல் $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{BC} = \mathbf{c}$ ஆகுக ; BM, CN என்பன B, C என்பனவற்றிலிருந்து OA யின்மீது வரைந்த செங்குத்துக்களாகுக.

நாம் காண்பது $\overrightarrow{OC} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$.

(8) இன் இ.கை.ப. $= OA$. கூறு$_{\mathbf{a}}$ $\overrightarrow{OC} = OA.ON$.

(8) இன் வ.கை.ப. $= OA.OM + OA.MN$

$$= OA\,(OM + MN) = OA.ON.$$



படம் 2

இதன்படி சமன்பாடு (8) சரியெனக் காண்கிறோம்.

எண்ணிப் பெருக்கங்களின் இவ்வுடைமைகள் காரணமாக எண்ணிப்பெருக்கச் செய்கைகளைப் பொதுவட்சரகணித விதிகளாற் செய்தல் இயலும். இவ்வாறு

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}).\,(\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{a}.\mathbf{c} + \mathbf{a}.\mathbf{d} + \mathbf{b}.\mathbf{c} + \mathbf{b}.\mathbf{d} \qquad (9)$$

a, **b** என்பன தந்த டெக்காட்டினுள் கூறுகள் பற்றி உணர்த்தப்படின், அவற்றின் எண்ணிப் பெருக்கம் இக்கூறுகள் பற்றிப் பின்வருமாறு பெறப்படலாம்.

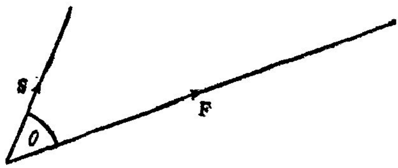
$$\begin{aligned}\mathbf{a}.\mathbf{b} &= (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}).\,(b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k})\\ &= a_xb_x\mathbf{i}.\mathbf{i} + a_xb_y\mathbf{i}.\mathbf{j} + a_xb_z\mathbf{i}.\mathbf{k} + a_yb_x\mathbf{j}.\mathbf{i} + a_yb_y\mathbf{j}.\mathbf{j}\\ &\quad + a_yb_z\mathbf{j}.\mathbf{k} + a_zb_x\mathbf{k}.\mathbf{i} + a_zb_y\mathbf{k}.\mathbf{j} + a_zb_z\mathbf{k}.\mathbf{k}\\ &= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z \qquad (10)\end{aligned}$$

அன்றியும், $\mathbf{a}^2 = \mathbf{a}.\mathbf{a} = a^2_x + a^2_y + a^2_z$ (11)

காட்டு. ஒரு விசை **F** இன் பிரயோக புள்ளிக்கு (அவ்விசையின் பருமனிலோ திசையிலோ யாதொரு மாற்றமுமின்றி) ஓர் இடப்பெயர்ச்சி **S** கொடுக்கப்படின், வரைவிலக்கணத்தால், அவ்விசையாற் செய்யப்படும் வேலை W ஆனது அவ்விசையின் திசையிலான இடப்பெயர்ச்சிக் கூற்றை

அவ்விசையின் பருமனூற் பெருகக வரும் பெருககத்திற்குச் சமன். இவ் வேலை எண்ணிப் பெருக்கம் பற்றிப் பின்வருமாறு வசதியாக உணர்த்தப் படலாம் :

$$W = |\mathbf{F}| \text{ கூறு}_{\mathbf{F}} \mathbf{S} = |\mathbf{F}||\mathbf{S}| \text{ கோசை } \theta$$
$$= \mathbf{F}.\mathbf{S}. \qquad (12)$$

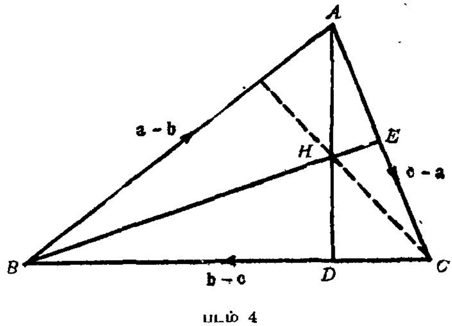


படம் 3

எடுத்துக்காட்டு 1. மூவாள்கூறறச்சுக்களின் திசைகளிலும ஒரு காவி **a** யின் கூறுகள் முறையே **a**.**i**, **a**.**j**, **a**.**k** எனக் காட்டுக.

அக்கூறுகள் a_x, a_y, a_z என்பனவாயின், $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$. **i** ஒடு இரண்டிலொரு பக்கத்தின் எண்ணிப் பெருக்கத்தை எடுத்து $\mathbf{i}.\mathbf{i} = 1$, $\mathbf{i}.\mathbf{j} = 0$, $\mathbf{i}.\mathbf{k} = 0$ என்பனவற்றைப் பயன்படுத்த $\mathbf{a}.\mathbf{i} = a_x$ எனபதைப பெறு வோம். அதுபோல, $a_y = \mathbf{a}.\mathbf{j}$, $a_z = \mathbf{a}.\mathbf{k}$.

எடுத்துக்காட்டு 2. காவிகளைப் பயன்படுதகி ஒரு முக்கோணியின் குத்துயரங்கள் ஒரு புள்ளியிற சந்திககுமெனக் காட்டுக.



படம் 4

a, **b**, **c** என்பன அமமுககோணியின A, B, C எனனும உச்சிகளின நிலைக் காவிகளாகுக ; **r** என்பது A, B என்பனவறறிலிருநது வரையப் படும் குத்துயரங்களின் வெட்டுப புள்ளி H இன் நிலைககாவியாகுக.

$$\overrightarrow{AH} = \mathbf{r} - \mathbf{a}, \qquad \overrightarrow{BH} = \mathbf{r} - \mathbf{b}, \qquad \overrightarrow{CH} = \mathbf{r} - \mathbf{c},$$

$$\overrightarrow{BA} = \mathbf{a} - \mathbf{b}, \qquad \overrightarrow{CB} = \mathbf{b} - \mathbf{c}, \qquad \overrightarrow{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a},$$

AH ஆனது BC யிற்குச் செங்குத்தாதலால்,

$$(\mathbf{r} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0.$$

$BH \perp CA$ ஆதலால்,

$$(\mathbf{r} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = 0.$$

இந்த இரு தொடர்புகளையுங் கூட்ட நாம் பெறுவது

$$\mathbf{r} . \mathbf{b} - \mathbf{r} . \mathbf{c} - \mathbf{a} . \mathbf{b} + \mathbf{a} . \mathbf{c} + \mathbf{r} . \mathbf{c} - \mathbf{r} . \mathbf{a} - \mathbf{b} . \mathbf{c} + \mathbf{b} . \mathbf{a} = 0 ;$$

இது $$(\mathbf{r} - \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = 0$$

என்னுஞ் சமனபாடெனக் காணப்படும்; $CH \perp AB$ என்பதன் நிபந்தனையாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 3. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ என்பன $1 + \mathbf{a} . \mathbf{b} \neq 0$ ஆகுமாறு தந்த காவிகளாகுமிடத்து

$$\mathbf{x} + (\mathbf{x} . \mathbf{b})\, \mathbf{a} = \mathbf{c} \tag{13}$$

என்னுங் காவிச் சமனபாட்டை $\mathbf{x}$ இற்குத் தீர்க்க.

$\mathbf{b}$ ஒடு (13) இன் எண்ணிப் பெருக்கத்தை எடுக்க, நாம் பெறுவது

$$\mathbf{x} . \mathbf{b} + (\mathbf{x} . \mathbf{b})(\mathbf{a} . \mathbf{b}) = \mathbf{c} . \mathbf{b}$$

எனின், $$\mathbf{x} . \mathbf{b} = \frac{\mathbf{c} . \mathbf{b}}{1 + \mathbf{a} . \mathbf{b}} \tag{14}$$

$1 + \mathbf{a} . \mathbf{b} \neq 0$ என்னும் நிபந்தனையைப் பயன்படுத்துமிடத்து.

(13) இல் $\mathbf{x} . \mathbf{b}$ இற்குப் பிரதியிடுதலால், நாம் பெறுவது

$$\mathbf{x} = \mathbf{c} - \frac{\mathbf{c} . \mathbf{b}}{1 + \mathbf{a} . \mathbf{b}}\, \mathbf{a}. \tag{15}$$

தீர்வு (15) ஆனது சமன்பாடு (13) ஐத் திருப்தியாக்குமென்பதை, நேரடியாகப் பிரதியிட்டு நாம் வாய்ப்புப் பார்க்கலாம்.

பயிற்சி II a

1. $$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2 + 2\mathbf{a} . \mathbf{b} + \mathbf{b}^2,$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) . (\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2,$$

எனக் காட்டுக.

2. $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

என்னுங் காவிகள் தரப்பட்டால், பின்வருவனவற்றின் பெறுமானங்களைக் கணிக்க:

(i) $\mathbf{a} . \mathbf{a}$; (ii) $\mathbf{a} . \mathbf{i}$, $\mathbf{a} . \mathbf{j}$, $\mathbf{a} . \mathbf{k}$; (iii) கூறு$_{\mathbf{a}}$ $(\mathbf{b} + \mathbf{c})$; (iv) $\mathbf{a} . \mathbf{b}$; (v) கோசை $\widehat{\mathbf{bc}}$.

3. $A=(1, 2, -1)$, $B=(0, 0, 1)$, $C=(2, 1, 2)$ என்றும் புள்ளிகள் தரப்பட்டால், பின்வருவனவற்றைக் காண்க :

(i) $\overrightarrow{AB}$ யின் டெக்காட்டுக கூறுகள், (ii) AB யின் நீளம்,

(iii) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, (iv) $\angle CAB$ யின் பருமன்.

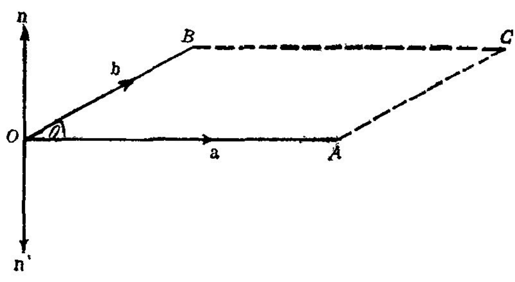
4. விசை $\mathbf{F}=(15, 10, 5)$ இரு. எனபதன பிரயோகப் புளளியானது $A=(3, 0, 2)$ என்னும் புள்ளியிலிருநது $B=(-6, -1, 3)$ என்னும் புள்ளிககு இடம் பெயர்க்கப்படுகின்றது. ஆள்கூறுகள் அடிகளிலிருநதால், அவ்விசையினற் செய்யப்படும் வேலையை அடியிருத்தலிற காட்டுக.

5. $\mathbf{a}=l\mathbf{i}+m\mathbf{j}+n\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=l'\mathbf{i}+m'\mathbf{j}+n'\mathbf{k}$ என்பன அலகுக் காவிகளாயிருக்க θ என்பது அவற்றிற்கு இடையிலுள்ள கோணமெனின், கோசை $\theta=ll'+mm'+nn'$ எனக் காட்டுக.

6. ஓர் அலகுச் சதுரமுகியின் இரு மூலைவிட்டஙகளின எண்ணிப் பெருக்கத்தைக் காண்க ; இந்த இரு மூலைவிட்டங்களுககும் இடையிலுள்ள கோணத்தையுங் காண்க.

2.2. காவிப் பெருக்கம்

a, **b** என்னும் இரு காவிகளிலிருந்து ஒரு காவியாகிய ஒரு பெருக்கத்தைப் பின்வருமாறு ஆக்கலாம் :



படம் 5.

$\mathbf{a}=\overrightarrow{OA}$, $\mathbf{b}=\overrightarrow{OB}$ என்பன அவ்விரு காவிகளாகக கொளக ; OB ஒடு ஒன்றிடுமாறு AOB என்னுந் தளத்தில் OA யானது திருப்பபபடவேண்டிய கோணம் θ ஆகுக ; அது இரண்டு செங்கோணங்களிலுஞ் சிறிதாயிருகக. O இற்கூடாகத் தளம் AOB யிற்கு ஒரு செங்குத்து வரைவோமாக. இதனைச் சமமும் எதிருமான இரண்டு போக்குகளில் வரைதல் கூடும். **n** என்பது செஙகுத்தாயுள்ள அலகுக் காவியாகுக ; **a**, **b**, **n** என்பன இவ்வொழுஙகில எடுக்கப்பட்ட ஒரு வலஞ்சுழித் திருகை ஆக்குமாறு அக் காவியின் போக்கு இருக்க ; அதாவது, ஒரு செநதிருகானது **n** இன்

நீளத்திற்கு இடப்பட்டபின் அத்திருகு OB முகமாக OA திரும்புமாறு தன்னச்சுபற்றித் திருப்பப்பட்டால், அத்திருகு **n** இன் நீளத்திற்கு முன்னேககாய் இயங்கும.

n′ என்பது **n** இன் எதிர்ப்போக்கிலே தளம் AOB யிற்குச் செங்குத்து ; அதாவது $\mathbf{n}' = -\mathbf{n}$. **a**, **b** என்பனவற்றின் இவ்வொழுங்கிலே எடுக்கப்பட்ட **காவிப்பெருக்கம் (புறப்பெருக்கம்** என்றுஞ் சிலவேளை கூறப்படும்) பின்வரும் உடைமைகளோடு கூடிய காவியென வரையறுக்கப்படும் :

(i) அதன் பருமன் $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ சைன θ

(ii) அதன் திசை **a** யிற்கும் **b** யிற்குஞ் செங்குத்தான அலகுக்காவி **n** இன் வழியே இருக்கும ; ஆயின், அது **a**, **b** என்பனவற்றால் ஆக்கப்படுந தளத்திற்குச் செங்குத்தாயிருக்கும் ; அன்றியும், **a**, **b**, **n** என்பன இவ்வொழுங்கில் எடுக்கப்பட ஒரு வலஞ்சுழித்திருகை ஆக்கும்.

இவ்வாறு வரையறுக்கப்படுங் காவிப்பெருக்கம் $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ என்பதனாற் குறிக்கப்படும் ; இது " **a** புள்ளடி **b** " என உரைக்கப்படும். [இது சிலவேளை $\mathbf{a}\wedge\mathbf{b}$ என எழுதப்பட்டு '**a** காவி **b**' என உரைக்கப்படும்] மேற்காட்டிய குறியீடுபற்றி

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \text{ சைன் } \theta\mathbf{n} \tag{16}$$

இனி, $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ என்னுங் காவிப்பெருககத்தை எடுத்து நோககுவோம். வரைவிலககணத்தின்படி, அதன் பருமன் $|\mathbf{b}||\mathbf{a}|$ சைன் θ ; இது $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ இன் பருமனுக்குச் சமனாகும். $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ யின் திசை **n**′ இன் வழியே இருக்கும் ; அதற்குக் காரணம் **b**, **a**, **n**′ என்பன இவ்வொழுங்கில் எடுக்கப்பட்ட ஒரு வலஞ்சுழித் திருகை ஆக்கும் என்பதே. எனின்,

$$\mathbf{b}\times\mathbf{a}=|\mathbf{b}||\mathbf{a}| \text{ சைன் } \theta\mathbf{n}' = -|\mathbf{b}||\mathbf{a}| \text{ சைன் } \theta\mathbf{n} = -\mathbf{a}\times\mathbf{b}. \tag{17}$$

இவ்வாறு, மாற்றுவிதி காவிப் பெருக்கத்திற்குப் பொருந்தாது என்பதைக் காணபோம ; ஆதலால், ஒரு காவிப் பெருக்கத்தின் காரணிகளை எழுதும் ஒழுங்குபற்றி நாம் அவதானமாய் இருத்தல் வேண்டும்.

பின்வரும் உடைமைகளை வாய்ப்புப் பார்த்தல் எளிது :

a, **b** என்பன சமாநதர காவிகள் எனின்,

$$\mathbf{a}\times\mathbf{a}=0 \tag{18}$$

λ என்பது ஓர் எண்ணியாயின்,

$$(\lambda\mathbf{a})\times\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{b}) \tag{19}$$

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=0 \text{ எனின்,} \tag{20}$$

$\mathbf{a}=0$ ஆயாதல், $\mathbf{b}=0$ ஆயாதல், **a**, **b** என்பன சமாநதரமாயாதல், அவை ஒரே கோட்டிலுள்ளவையாயாதல் இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு **i**, **j**, **k** என்பன மூன்று ஆள்கூற்றச்சுக்களின் நீளத்திற்குமுள்ள அலகுக் காவிகளெனின, பின்வருவனவற்றைக் காண்க :

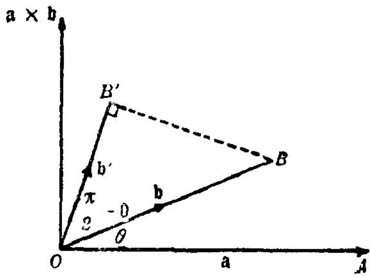
$$\mathbf{i}\times\mathbf{i},\ \mathbf{i}\times\mathbf{j},\ \mathbf{i}\times\mathbf{k},\ \mathbf{j}\times\mathbf{i},\ \mathbf{j}\times\mathbf{j},\ \mathbf{j}\times\mathbf{k},\ \mathbf{k}\times\mathbf{i},\ \mathbf{k}\times\mathbf{j},\ \mathbf{k}\times\mathbf{k}.$$

நாம காண்பன $\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=\mathbf{0}$, (21)

(18) இன் சிறப்பு வகைகளாய இருத்தலால். அன்றியும், **i, j, k** என்பன இவ்வொழுங்கில் ஒரு வலஞ்சுழிததிருகை ஆக்கும். இவ்வாறே **i, j, k** என்பனவற்றின் சக்கரவிடமாற்றிஞற் பெறப்படும் ஒழுங்கிலும் இக்காவிகள ஆக்கும் ; அவையாவன **j, k, i** உம்; **k, i, j** உம் : எனின், நாம் காணபன

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{i}\times\mathbf{j}&=\mathbf{k}=-\mathbf{j}\times\mathbf{i}\\ \mathbf{j}\times\mathbf{k}&=\mathbf{i}=-\mathbf{k}\times\mathbf{j}\\ \mathbf{k}\times\mathbf{i}&=\mathbf{j}=-\mathbf{i}\times\mathbf{k}\end{aligned}\right\}\qquad(22)$$

$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ ஆனது, ஒரு காரணியை மற்றையதற்குச் செங்குததான ஒரு தளத தில் அதன் செங்குத்தெறியததால் இடம்பெயர்க்க, மாற்றம் அடையாது என்னும் முடிபு பயன்படுங் காவிப் பெருக்கங்களின் ஏனையுடைமைகளுள் ஒன்றுகும்.



படம் 6

B' என்பது OA யிற்குச செங்குத்தாய் O விறகூடாகச செல்லுந தளத்திற்கு B யிலிருந்து வரையப்படுஞ் செங்குத்தின் அடியாகுக.

ஆயின், OA, OB, OB' என்பனவெல்லாம் $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ செங்குத்தான ஒரு தளததின்மீது கிடக்கும்.

ஆதலால், $OB'=OB$ கோசை $(\pi/2-\theta)=OB$ சைன் θ.

$\overrightarrow{OB'}\equiv\mathbf{b}'$ எனின், $|\mathbf{b}'|=|\mathbf{b}|$ சைன θ,

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}'=|\mathbf{a}||\mathbf{b}'|\mathbf{n}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|\text{ சைன் }\theta\mathbf{n}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}.\qquad(23)$$

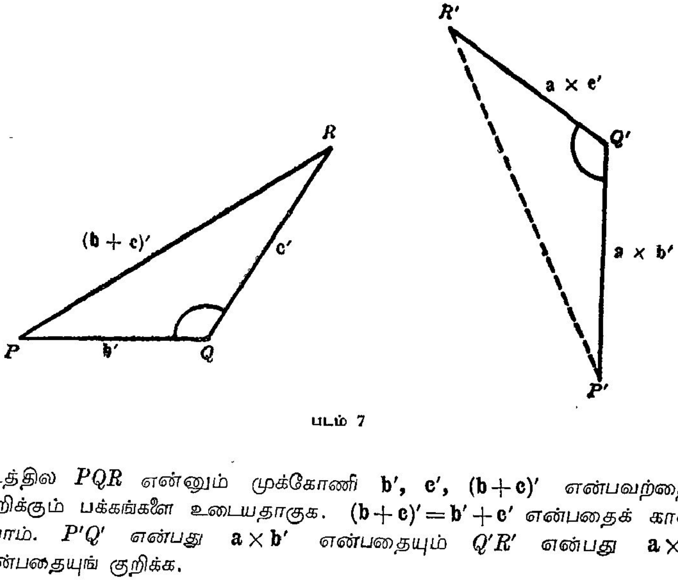
இம்முடிபு காவிப்பெருக்கங்களின் பங்கீட்டு விதியைத் தாபித்தற்குப் பயன்படும் ; அதாவது

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{a}\times\mathbf{c}\qquad(24)$$

இம்முடிபை நிறுவுவதற்கு, இத்தாளின் தளத்தைக் காவி **a** யிற்குச் செங்குத்தான ஒரு தளமெனக் கொள்க; **b′**, **c′**, **(b+c)′** என்பன முறையே **b**, **c**, **(b+c)** என்பனவற்றின் இத்தளமீதான எறியங்களாகுக. (23) இன் பிரயோகத்தால், நாம் பெறுவன $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}'$, $\mathbf{a}\times\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{c}'$ என்பன. ஆகவே, (24) ஐ நிறுவுதற்கு

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})'=\mathbf{a}\times\mathbf{b}'+\mathbf{a}\times\mathbf{c}' \qquad (25)$$

எனக் காட்டுதல் போதியதாகும்.



படம் 7

படத்தில PQR என்னும் முக்கோணி **b′**, **c′**, **(b+c)′** என்பவற்றைக் குறிக்கும் பக்கங்களை உடையதாகுக. $(\mathbf{b}+\mathbf{c})'=\mathbf{b}'+\mathbf{c}'$ என்பதைக் காண்போம். $P'Q'$ என்பது $\mathbf{a}\times\mathbf{b}'$ என்பதையும் $Q'R'$ என்பது $\mathbf{a}\times\mathbf{c}'$ என்பதையுங் குறிக்க.

படத்தில், $P'Q'$, $Q'R'$ என்பன முறையே PQ, QR என்பனவற்றிற்குச் செங்குத்தாயும் விகிதசமமாயும் இருப்பதைக் காண்போம். ஆகவே, PQR, $P'Q'R'$ என்னும் முக்கோணிகள் இயல்பொத்தவை. PQR என்னும் முக்கோணியை அதன் தளத்தில ஒரு செங்கோணத்திற்கூடாகத் திருப்பி ஒவ்வொரு பக்கத்தையும் $|\mathbf{a}|:1$ என்னும் விகிதத்தில் உருப்பெருக்கஞ் செய்து, $P'Q'R'$ என்னும் முக்கோணியை PQR என்னும் முக்கோணியிலிருந்து பெறலாம், எனின், $P'R'$ என்னும் மூன்றும் பக்கத்திற்குப் பருமன் $|\mathbf{a}|.PR=|\mathbf{a}||(\mathbf{b}+\mathbf{c})'|$; அது $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c})'$ என்பதைக் குறிக்கும். $\overrightarrow{P'R'}=\overrightarrow{P'Q'}+\overrightarrow{Q'R'}$ ஆதலால், நாம் (25) ஐப் பெறுவோம்; அதிலிருந்து (24) ஐயும் பெறுவோம்.

a, **b** என்பனவற்றின் டெக்காட்டுக் கூறுகள் பற்றி, $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ என்பதைப் பின்வருமாறு பெறலாம் :

$$\begin{aligned}\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= (a_x\mathbf{i}+a_y\mathbf{j}+a_z\mathbf{k})\times(b_x\mathbf{i}+b_y\mathbf{j}+b_z\mathbf{k})\\ &= a_xb_x\mathbf{i}\times\mathbf{i}+a_xb_y\mathbf{i}\times\mathbf{j}+a_xb_z\mathbf{i}\times\mathbf{k}+a_yb_x\mathbf{j}\times\mathbf{i}\\ &\quad +a_yb_y\mathbf{j}\times\mathbf{j}+a_yb_z\mathbf{j}\times\mathbf{k}+a_zb_x\mathbf{k}\times\mathbf{i}+a_zb_y\mathbf{k}\times\mathbf{j}+a_zb_z\mathbf{k}\times\mathbf{k}\\ &= \mathbf{i}\,(a_yb_z-a_zb_y)+\mathbf{j}\,(a_zb_x-a_xb_z)+\mathbf{k}\,(a_xb_y-a_yb_x) \qquad (26)\end{aligned}$$

இதை,

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix} \qquad (27)$$

என்னும் வடிவத்தில் எழுதலாம்.

காவிப் பெருக்கங்களின் இவ்வேறுவேறான உடைமைகள் காவிப் பெருக்கங்களைக் கொண்ட கோவைகளையுஞ் சமன்பாடுகளையுங் கொண்டு வினைசெய்ய நம்மை இயலுவிக்கின்றன. காவிப் பெருக்கங்களின் காரணியொழுங்கை அவதானமாய் நிலை நிறுத்திஞல், பொது அட்சரகணித விதிகள் அனுசரிக்கப்படலாம்.

உதாரணமாக,

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{c}+\mathbf{d})=\mathbf{a}\times\mathbf{c}+\mathbf{a}\times\mathbf{d}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{b}\times\mathbf{d} \qquad (28)$$

என்பதை அனுமானித்தற்கு மேலுள்ளதை நாம் பயன்படுத்தலாம்.

காட்டுக்கள்

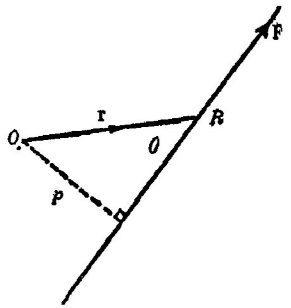
1. படம் 5 இல், இணைகரத்தின் பரப்பு $|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ சைன் $\theta=|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$. அன்றியும், அவ்விணைகரத்தின் தளத்திற்கு வரையப்படுஞ் செங்குத்து காவி **n** இன் அதே திசையில், அதாவது $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ யின் அதே திசையிலேயே இருக்கும். ஒரு பரப்பளவு A யானது அப்பரப்பளவிற்குச் செங்குத்தான திசையையும் அப்பரப்பளவின் பருமனுக்கு விகிதசமமான பருமனையும் உடைய ஒரு காவியிஞற் காவி முறையாகக் குறிக்கப்படலாம் என்னும் வழக்கை நாம் மேற்கொண்டால், $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ என்னுங் காவிப் பெருக்கமானது **a**, **b** என்னுங் காவிகளை முறையே குறிக்கும் அடுத்துள பக்கங்களையுடைய $OACB$ என்ற இணைகரத்தின் பரப்பளவைக் காவி முறையிற் குறிக்கும் என்பதை நாம் காண்போம்.

2. **ஒரு புள்ளிபற்றி ஓரிடப்படுத்திய காவியொன்றின் திருப்பம்**

F ஆனது ஓரிடப்படுத்திய காவியொன்ருயிருக்க, **r** ஆனது **F** இன் தாக்கக்கோட்டிலுள்ள ஒரு புள்ளி R இன் நிலைக்காவியெனின், காவி **F** இன் O பற்றி எடுக்கப்படும் காவித் திருப்பம் காவி **M** என வரையறுக்கப்படும். இங்கு

$$\mathbf{M}=\mathbf{r}+\mathbf{F} \qquad (29)$$

இத்திருப்பம அக்கோட்டின மீதுள்ள R இன் சிறப்பு நிலையைச் சாராது இருக்கும். அக்கோட்டின் மீது வேருெரு புள்ளி R' ஐ எடுப்போம ; அதன் நிலைக்காவி $\mathbf{r}'$ ஆகுக ; எனின், $\mathbf{r}'=\mathbf{r}+\overrightarrow{RR'}$.



படம் 8

அதனேடு, $R'R$, $\mathbf{F}$ என்னும இரணடும் ஒரே கோட்டின் நீளத்திற்கு இருத்தலால், $\overrightarrow{RR'}\times\mathbf{F}=\mathbf{0}$

ஆகையால், $$\mathbf{r}'\times\mathbf{F}=(\mathbf{r}+\overrightarrow{RR'})\times\mathbf{F}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}+\overrightarrow{RR'}\times\mathbf{F}$$
$$=\mathbf{r}\times\mathbf{F},$$

திருப்பம் $\mathbf{M}$ இன் பருமன் $|\mathbf{r}||\mathbf{F}|$ சைன் $\theta=p|\mathbf{F}|$. இங்கு p ஆனது O இலிருந்து $\mathbf{F}$ இன் தாக்கக்கோட்டின் செங்குத்துத் தூரம். $\mathbf{M}$ இன் திசை புள்ளி O ஐயும் $\mathbf{F}$ இன் தாக்கக்கோட்டையுங் கொண்ட தளத்திற்குச் செங்குத்து.

தன் நிலைக்காவி $\mathbf{r}_0$ ஆயுளள ஒரு புள்ளிபற்றி $\mathbf{F}$ இன் திருப்பம்
$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\times\mathbf{F}. \qquad (30)$$

பயிற்சி II b

1. $\mathbf{a}=2\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}$, $\mathbf{c}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ எனின,

பின்வருவனவற்றின பெறுமானஙகளைக காணக :

(i) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, (ii) $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$, (iii) $(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).\mathbf{c}$, (iv) $\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$,
(v) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$, (vi) $\mathbf{a}.(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$ (vii) $\mathbf{a}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$.

2. ஒரு முககோணியின உச்சிகள் A, B, C எனபனவறறின நிலைக்காவிகள முறையே $\mathbf{i}$, $\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $-\mathbf{k}$ எனபனவெனின், பின்வருவனவறறைக் காணக.

(i) சைன A, சைன் B, சைன் C என்பனவறறின் பெறுமானங்கள,

(ii) அமமுககோணியின தளததிறகுச செஙகுததான அலகுககாவி,

(iii) அம்முக்கோணியின பரப்பளவு.

3. காவி (1, 2, 5) உற்பத்தியிலிருந்து வரையப்பட்டுள்ளது. (1, 0, 1) என்னும் புள்ளியிலிருந்து இதற்குச் செங்குத்தான காவியைக் காண்க.

4. ஆள்கூற்றுறுபத்தி O இலிருந்து வறையப்படும் **a**, **b**, **c** என்னும் மூன்று காவிகளின முனைப்புள்ளிகள் ABC என்னும் ஒரு முககோணியின உச்சிகளாகும். பின்வருவனவற்றைக் காண்க.

(i) உற்பத்தியிலிருந்து அம்முக்கோணியினது தளத்தின் தூரம,

(ii) அம்முக்கோணியின் பரபபளவு,

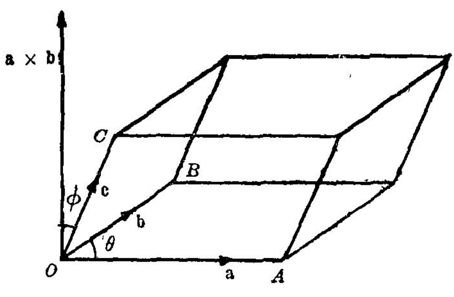
(iii) $OABC$ என்னும் நான்முகியின் கனவளவு.

5. $\mathbf{F}=(X, Y, 0)$ ஆயும் $\mathbf{r}=(x, y, 0)$ ஆயும இருந்தால், புள்ளி **r** இறகூடாகச் செல்லுங காவி **F** இன் உற்பத்திபற்றிக் காவிததிருபபம் $(0, 0, xY - yX)$ எனக் காட்டுக.

2.3. மும்மைப் பெருக்கம்

a, **b**, **c** என்பன எவையேனும் மூன்று காவிகளெனின், **c** ஒடு $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ இன் எண்ணிப் பெருக்கம் $(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).\mathbf{c}$ என எழுதப்படும ; அது ஒரு மும்மையெண்ணிப் பெருக்கமெனக் கூறப்படும்.

இப்பெருக்கமானது **a**, **b**, **c** என்பனவற்றை அடுத்துள விளிம்புகளாகவுள்ள இணைகரப்பரவையின் கனவளவிற்கு எண்ணளவிற் சமம் என்பதை நாம் காணல்கூடும். $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, **c** என்பனவற்றிற் கிடையிலுள்ள கோணம் ϕ என்னுங் கூர்ங்கோணமாயிருக்கும் வகையை எடுத்து நோக்குக.



படம் 9

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).\mathbf{c}=|\mathbf{a}\times\mathbf{b}||\mathbf{c}| \text{ கோசை } \phi,$$
$$=|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \text{ சைன } \theta\, |\mathbf{c}| \text{ கோசை } \phi.$$

OA, OB, OC என்பனவற்றை விளிம்புகளாகவுடைய இணைகரப்பரவையின் கனவளவை எடுத்து நோக்குவோமாயின், OA, OB எனபனவற்றைக் கொண்ட முகத்தை அடியாக நாம் கொள்ளலாம்.

அவ்வடியின் பரப்பளவு $|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|$ சைன் θ; அவ்விணைகரப்பரவையின் குத்துயரம் $|\mathbf{c}|$ கோசை ϕ. எனின், அவ்விணைகரப்பரவையின் கனவளவு $|\mathbf{a}|\ |\mathbf{b}|$ சைன் θ $|\mathbf{c}|$ கோசை ϕ என நாம் பெறுவோம்.; இது $(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).\ \mathbf{c}$ என்னும் மும்மையெண் பெருக்கமாயும் இருக்கும்.

கோணம் ϕ ஆனது கூர்ங்கோணமாய் இருக்கவேண்டும் என்னும் நியதியில்லாத பொது வகையில்

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).\ \mathbf{c}=\pm \text{ இணைகரப்பரவையின் கனவளவு} \tag{31}$$
$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).\ \mathbf{c}=\mathbf{a}.\ (\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \tag{32}$$

என நாம் காட்டல்கூடும்.

ஒவ்வொரு பக்கத்தையும் $[\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}]$ அல்லது $(\mathbf{abc})$ அல்லது $(\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c})$ என்னுங் குறியீட்டால் நாம் குறிக்கலாம்.

சமன்பாடு (27) பயன்படுத்த,

$$[\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}]=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \tag{33}$$

என்பதை நாம் பெறல் கூடும்.

துணிகோவைகளின் உடைமைகளைப் பயன்படுத்த,

$$[\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c},]=[\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}]=[\mathbf{c},\ \mathbf{a},\ \mathbf{b}]$$
$$=-[\mathbf{a},\ \mathbf{c},\ \mathbf{b}]=-[\mathbf{b},\ \mathbf{a},\ \mathbf{c}]=-[\mathbf{c},\ \mathbf{b},\ \mathbf{a}] \tag{34}$$

என நாம் காணல் கூடும்.

a, b, c என்பனவற்றிலிருந்து சக்கரவிடமாற்றினாற் பெறக்கூடிய ஒழுங்கினுள்ள மூன்றுகாவிகளுள்ள பெருக்கங்களுக்கு ஒரு குறியும் **a, c, b** என்பனவற்றின் சக்கரவிடமாற்றிலிருந்து வருவனவற்றிற்கு எதிர்க்குறியும் உண்டென நாம் காண்போம்.

a, b, c என்பன ஒருதளக் காவிகளெனின், $[\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}]=0$. $[\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}]=0$ எனின்,

$\mathbf{a}=\mathbf{0}$, அல்லது $\mathbf{b}=\mathbf{0}$, அல்லது $\mathbf{c}=\mathbf{0}$, அல்லது **a, b, c** என்பன ஒருதளத்தினுள்ளவை.

குறிப்பாக, **a, b, c** என்பனவற்றுள் எவையேனும் இரண்டு சமமாயின், $[\mathbf{a},\ \mathbf{b},\ \mathbf{c}]=0$.

உ-ம். எந்த **a** யிற்கும **b** யிற்கும் $[\mathbf{a}\ \ \mathbf{a},\ \mathbf{b}]=0$.

$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ போன்ற **காவிமும்மைப் பெருக்கம்** ஒன்றையும் நாம் வரையறுக்கலாம். $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ என்பதும் வித்தியாசமானவையெனக் காணப்படுதலால், இங்கு அடைப்புக்குறியை எங்கே இடுவதென்பது முக்கியமாகும். சூத்திரம் (26) ஐப் பயன்படுத்த,

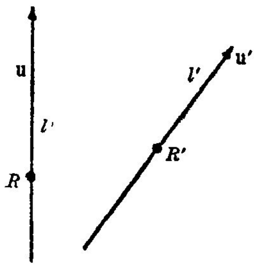
$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}.\mathbf{c})\ \mathbf{b}-(\mathbf{a}.\mathbf{b})\mathbf{c} \tag{35}$$

என்று காட்டலாம்.

சமன்பாடு (35) இற்குப் பல சுவையான நிறுவல்கள் உள. வாசகர்கள் இதன் நிறுவலுக்கான மாற்று வழிகளைப் பரிசீலிப்பார்களாக.

2.4. இரு கோடுகளின் தம்முள் திருப்பம்

R, R' என்பன தம் நிலைக்காவிகள் $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}'$ என்பனவாக முறையே l, l' என்னுங் கோடுகளின்மீது இடக்கும் புள்ளிகளெனக் கொள்க. $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}'$ என்பன அவ்விருகோடுகளின் நீளத்திற்கு எடுக்கப்படும் அலகுக் காவிகளாகுக.



படம் 10

l' இன் நீளத்திற்கு உள்ள ஒரு காவி $\mathbf{F}$ இன் R பற்றி எடுக்கப்படும் காவித் திருப்பம் $\mathbf{M}$ ஆனது

$$\mathbf{M} = (\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \times F\ \mathbf{u}'$$

என்பதனாலே தரப்படும். l' இன் நீளத்திற்கு உள்ள காவி $\mathbf{F}$ இன் கோடு l பற்றி எடுக்கப்படும் எண்ணித் திருப்பமானது புள்ளி R பற்றி எடுக்கப்படும் காவித் திருப்பத்தின் l இன் நீளத்திற்கு உள்ள கூறென வரையறுக்கப்படும், அதாவது கூறு$_1$ $\mathbf{M}$. இதற்கு

$$\mathbf{M}.\ \mathbf{u} = F\ [\mathbf{r}' - \mathbf{r},\ \mathbf{u}',\ \mathbf{u}] \tag{36}$$

என்னும் பெறுமானம் உண்டு.

கோவை (36) மாற்றப்படாதிருக்க, R ஆனது l இன்மீது யாதுமொரு புள்ளியாயும் R' ஆனது l' இன்மீது யாதுமொரு புள்ளியாயும் இருத்தல் முடியும் என்பதை நாம் வாய்ப்புப் பார்க்கலாம்.

ஒரு கோடுபற்றி இரண்டாங் கோட்டின் நீளத்திற்கு உள்ள அலகுக் காவியின் திருப்பம் இரண்டாங் கோடுபற்றி முதற்கோட்டின் நீளத்திற்கு உள்ள அலகுக் காவியின் திருப்பத்துக்குச் சமம் என்பதையும் நாம் அறியலாம். $[\mathbf{r} - \mathbf{r}',\ \mathbf{u},\ \mathbf{u}'] = [\mathbf{r}' - \mathbf{r},\ \mathbf{u}',\ \mathbf{u}]$ என்பதைக் காணுதலால் இம்முடிபை நாம் தாபிக்கலாம்; இச்சமத்தன்மையைத் துணிகோவைகளின் உடைமைகளிலிருந்து காணலாம்.

$$m = [\mathbf{r} - \mathbf{r}', \mathbf{u}, \mathbf{u}'] = [\mathbf{r}' - \mathbf{r}, \mathbf{u}', \mathbf{u}] \qquad (37)$$

என்பதை அவ்விரு கோடுகளின் தம்முள் திருப்பமென வரையறுக்கின்றோம்.

அவ்விரு கோடுகளும் ஒன்றையொன்று வெட்டினால், $m = 0$.

எடுத்துக்காட்டு. இரு கோடுகளின தம்முள் திருப்பம் m ஆனது

$$m = \mathrm{d} \text{ சைன் } \theta$$

என்பதன்படி வரும எனக் காட்டுக. இங்கு இரு கோடுகளுக்குமிடையிலுள்ள மிகக் குறுகிய தூரம் d ; கோணம் θ.

படம் 10 ஐப் பயனபடுத்த, பொதுச் செங்குத்து பெருக்கக் காவி $\mathbf{u} \times \mathbf{u}'$ இன் திசையில் இருக்கும். இத்திசையிலான அலகுக் காவி $(\mathbf{u} \times \mathbf{u}') / |\mathbf{u} \times \mathbf{u}'| = \mathbf{u} \times \mathbf{u}'$ கோசீ θ. பொதுச் செங்குத்தின் நீளம், பொதுச் செஙகுத்தின் மீது காவி **RR′** இன் எறியமாகையால்,

$$\mathrm{d} = (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{u}') \text{ கோசீ } \theta$$

$$= \{\mathbf{r} - \mathbf{r}', \mathbf{u}, \mathbf{u}'\} \text{ கோசீ } \theta = m \text{ கோசீ } \theta$$

இதனால் $m = \mathrm{d}$ சைன θ

2.5. நேர் மூவடையும் மறை மூவடையும்

i, j, k என்பன ஒரு வலஞ்சுழியாள் கூற்றுத் தொகுதியின் மூன்று அச்சுக்களின் நீளததிற்கும் உள்ள அலகுக் காவிகளைக் குறிக்குமெனின், மும்மையெண்ணிப் பெருக்கம $[\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}] = +1$ எனக் காண்போம். இவ்வகையில், **i, j, k** என்னும் மூனறு அலகுக் காவிகளும் இவ்வொழுங்கில் ஒருநோ மூவடையை ஆக்குகினறன என்று நாம் கூறலாம். **i, j, k** எனபனவற்றிலிருநது சக்கரவிடமாறறினுற் பெறப்படும் **j, k, i,** உம் **k, i, j** உம் நேர் மூவடைகளுமாகும் எனறு காணுதல் எளிது. ஆனால் **i, k, j** உம் **j, i, k** உம், **k, j, i** உம் இடஞ்சுழித் தொகுதிகளுக்கு உரியவை ; அவை மறை மூவடைகளாகும் ; இவ்வொழுங்குகளில் எண்ணிப் பெருக்கங்களின் பெறுமானம் -1. ஒரே சக்கரவொழுங்கைக் கொண்ட மூவடைகளுக்கு ஒரே குறி உணடு.

a, b, c என்னும ஒருதளக் காவியல்லாதவையாகிய எம்மூவடைக்கும இக்குறியீட்டை விரிக்கலாம. அத்தகை மூவடையை, காவிகளுள் யாதொன்றும் மற்றையிரண்டின தளத்தைக் கடக்காதவாறு அக்காவிகளைக் கூர்ங்கோணஙகளுக்கூடாகச் சுழறறுதலால், தம்முட் செங்குத்தான மூன்று காவிகளின் மூவடையாக உருமாற்றல் முடியும். **a, b, c** என்னும மூவடை உருமாற்றப்படுதலால் வரும் தம்முட் செங்குத்தான மூன்று காவிகளும் நோமூவடையையோ மறைமூவடையையோ ஆக்குதற்கேற்ப **a, b, c** என்பன ஒரு நேர்மூவடையையோ மறை மூவடையையோ ஆக்குமென்று கூறுவோம்.

a, b, c என்பன ஒருநேர் மூவடையை ஆக்கும்போது, மும்மையெண்ணிப் பெருக்கம் [**a, b, c**] இற்கு நேர்ப் பெறுமானம் உண்டு. ஒரு மறை மூவடைக்கு மும்மையெண்ணிப் பெருக்கம் மறைக்குறியை உடையதாகும். **a, b, c** எனபன நேர்மூவடையை ஆக்கினல், அவ்வாறே **b, c, a** உம் **c, a, b** உம். ஆனல், **a, c, b** உம **b, a, c** உம் **c, b, a** உம் அப்போது மறை மூவடைகளாகும்.

முன்னர் தந்த காவிப் பெருக்கத்தின் வரைவிலககணத்தில **a, b** உம் $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ உம் அவ்வொழுங்கில் ஒரு நேர் மூவடையை ஆக்குமாறு $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ யின் போக்கு எடுக்கப்பட்டதென நாம் காண்போம்.

2.6. கேத்திரகணிதப் பிரயோகங்கள்

பகுபகுக கேத்திர கணிதப் பேறுகள் பலவற்றைக் காவிக் குறியீட்டினற் சுருக்கமாகப் பெறலாம். உதாரணமாக ஒரு கோட்டின சமன்பாட்டை

$$\mathbf{r}-\mathbf{r}_0=\lambda\mathbf{l}$$

எனறு எழுதலாம. இங்கு கோட்டிலுள்ள ஒரு புள்ளியிலான நிலைக் காவியே $\mathbf{r}_0$; $\mathbf{l}$ என்பது கோட்டின் திசைக் கோசைன்களைத் தருகிறது. λ என்பது ஓர் எண்ணிப பரமாணி. அது புள்ளிக்குப் புள்ளி மாறுகிறது. மேலும் மையம் O உம் ஆரை a உம உள்ள ஒரு கோளத்தின் சமன்பாடு

$$\mathbf{r}^2=a^2.$$

மையம் $\mathbf{r}_0$ உம் ஆரை a உம் உள்ள கோளத்தின் சமனபாடு

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)^2=a^2$$

புள்ளி $\mathbf{r}_0$ ஊடாகச செல்வதும், தனக்குச் செஙகுத்தாக அலகுக காவி $\mathbf{n}$ உடையதுமான ஒரு தளத்தின் சமன்பாடு

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\,.\,\mathbf{n}=0$$

உதாரணம். ஒரு நீள்வளையத்துக்கு $2a$ நீளப் பேரியச்சு உண்டு. அதன் குவியங்கள் S, S' என்பன $\mathbf{c}, -\mathbf{c}$ எனனும நிலைக்காவிகளை உடையன. அதன் சமன்பாடு

$$(\mathbf{r}.\,\mathbf{c})^2-a^2\,(\mathbf{r}^2+\mathbf{c}^2)+a^4=0$$

எனக் காட்டுக.

P என்பது நீள்வளையத்திலுள்ளதும நிலைக்காவி $\mathbf{r}$ உடையதுமான ஒரு புள்ளியாயின்

$$S'P+SP=2a$$

அ-து.

$$|\mathbf{r}+\mathbf{c}|+|\mathbf{r}-\mathbf{c}|=2a$$

அல்லது

$$\sqrt{(\mathbf{r}^2+2\mathbf{c}\,.\,\mathbf{r}+\mathbf{c}^2)}+\sqrt{(\mathbf{r}^2-2\mathbf{c}\,.\,\mathbf{r}+\mathbf{c}^2)}=2a \qquad \text{(i)}$$

$$\{\mathbf{r}^2+2\mathbf{c}\,.\,\mathbf{r}+\mathbf{c}^2\}-\{\mathbf{r}^2-2\mathbf{c}\,.\,\mathbf{r}+\mathbf{c}^2\}=4\mathbf{c}\,.\,\mathbf{r} \qquad \text{(ii)}$$

(ii) ஐ (i) ஆற் பிரிக்க,

$$\sqrt{\{\mathbf{r}^2+2\mathbf{c}.\mathbf{r}+\mathbf{c}^2\}}-\sqrt{\{\mathbf{r}^2-2\mathbf{c}.\mathbf{r}+\mathbf{c}^2\}}=\frac{2\mathbf{c}.\mathbf{r}}{a} \qquad \text{(iii)}$$

(ii) இலும் (iii) இலுமிருந்து,

$$\sqrt{(\mathbf{r}^2+2\mathbf{c}.\mathbf{r}+\mathbf{c}^2)}=a+(\mathbf{c}.\mathbf{r})/a$$

வர்க்கித்து ஒழுங்குசெய்ய, வேண்டிய சமன்பாடு வரும்.

பயிற்சி II c

1. $\mathbf{a}=\mathbf{i}-\mathbf{j}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$, $\mathbf{c}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ எனத் தரப்பட்டால், **a, b, c** என்பன ஆக்குவது நேர் மூவடையோ, மறை மூவடையோ எனத் துணிக.

பின்வருவனவற்றின் பெறுமானங்களைக் காண்க.

(i) $\mathbf{a}.[(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times\mathbf{c}]$, (ii) $(\mathbf{a}\times\mathbf{c}).(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$,

(iii) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$, (iv) $(\mathbf{a}.\mathbf{c})\,\mathbf{b}-(\mathbf{a}.\mathbf{b})\,\mathbf{c}$.

2. $$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=0$$

எனக் காட்டுக.

3. $2\mathbf{i}-\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ என்னும் புள்ளிக்கூடாகத் தாக்கும் $3\mathbf{i}+\mathbf{k}$ ஆற் குறிக்கப்படும் ஒரு விசையின் காவித் திருப்பம் $\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ என்னும் புள்ளி பற்றிக் காண்க.

4. **x** என்னும் ஒரு காவி $\mathbf{x}=\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}+\nu\mathbf{c}$ என்னும் வடிவத்தில் எழுதப்பட்டுள்ளது; இங்கு, **a, b, c** என்பன தந்த மூன்று ஒரு தளக்காவிகளல்லாதவை.

$$\lambda=\frac{[\mathbf{x},\mathbf{b},\mathbf{c}]}{[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]},\quad \mu=\frac{[\mathbf{x},\mathbf{c},\mathbf{a}]}{[\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}]},\quad \nu=\frac{[\mathbf{x},\mathbf{a},\mathbf{b}]}{[\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}]}$$

எனக் காட்டுக.

a, b, c என்பன **i, j, k** ஆகுமெனக் கொள்ளப்படுமிடத்து இம்முடிபின் கருத்தைக் கூறுக.

5. θ என்பது $\mathbf{a}=2\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{b}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}$ என்னும் இரு காவிகளுக்கும் இடையிலுள்ள கோணமெனின்,

(i) **a, b** என்னும் இரண்டுக்குஞ் செங்குத்தான ஓர் அலகுக் காவியையும்

(ii) சைன θ என்பதையும் துணிக.

6. $A=(3,7,-2)$, $B=(1,5,-1)$, $\overrightarrow{AC}=\mathbf{i}+2\mathbf{j}$, $\overrightarrow{BD}=-\mathbf{i}+\mathbf{k}$ எனின், AC, BD என்னுங் கோடுகள் ஒன்றையொன்று வெட்டுமெனக் காட்டுக.

7. OA, OB, OC என்பன O இனூடான மூன்று கோடுகள். இவற்றுள் எவ்விருகோடும் பொருந்தவுமில்லை; செங்குத்தாயுமில்லை. தளம் α, OA இனூடாகச் செல்வதுடன் தளம் OBC இற்கு நிமிர்கோணத்ததாயும் உள்ளது. β, γ என்பவையும் α போன்று வரையறுக்கப்பட்டுள. α, β, γ என்பவைக்குப் பொதுவான கோடு ஒன்று உண்டென நிறுவுக.

[Camb. MT 1962]

8. **a, b** என்னும் அலகுக் காவிகள் செங்குத்தானவை; **c** என்னும் அலகுக் காவி a, b என்னும் இரண்டிற்கும் θ என்னுங் கோணத்திற் சாய்ந்திருக்கின்றது. $\alpha=$ கோசை θ, $\beta^2=-$ கோசை 2θ ஆயிருக்குமிடத்து

$$\mathbf{c}=\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\beta(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

எனக் காட்டுக.

$\mathbf{x}$ என்னுங் காவி $\mathbf{x}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{c}\times\mathbf{x}$ என்னுஞ் சமன்பாட்டைத் திருப்தியாக்குகின்றது. எனின்,

$$2\mathbf{x}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+(\mathbf{c}.\mathbf{x})\,\mathbf{c}$$

எனக் காட்டுக : இதிலிருந்து

$$\mathbf{x}=\tfrac{1}{2}\alpha\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\mathbf{a}-\tfrac{1}{2}\alpha\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\mathbf{b}+\frac{1-\alpha^2}{\beta}\,\mathbf{c}$$

என்னுந் தீர்வைப் பெறுக. [Camb. N. S. 1957]

9. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ என்பன மூன்று காவிகள் ; அவற்றுள் $\mathbf{a}$ ஆனது $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ என்னும் இரண்டிற்குஞ் செங்குத்து ; $|\mathbf{b}|=|\mathbf{c}|$. தம் நிலைக் காவிகள் $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ என்பனவாயுள்ள புள்ளிகள் மூன்றுக்கு மூடாகச் செல்லுந் தளத்தின் சமன்பாடு

$$\left\{\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|^2}+\frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}}{|\mathbf{b}||\mathbf{c}|+\mathbf{b}.\mathbf{c}}\right\}.\mathbf{r}=1$$

எனக் காட்டுக.

இதனைத் துணைக கொண்டாயினும் பிறிதொரு முறையாலாயினும்,

$$(1,\ 1,\ 1),\ (-1,\ 2,\ -1),\ (-1,\ -1,\ 2)$$

என்னும் புள்ளிகளுக்கூடாகச் செல்லுந் தளத்தின் சமன்பாட்டைக் காண்க.

[Camb. N. S. 1956]

10. மூன்று காவிகள் பின்வரும் வடிவத்தில் எழுதப்பட்டுள்ளன :

$$\mathbf{r}_n=x_n\mathbf{i}+y_n\mathbf{j}+z_n\mathbf{k}\qquad(n=1,2,3)$$

இங்கு $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ என்பன நிமிர்கோணமல்லாத (ஒரு தளமானவையல்லாத) மூன்று அலகுக் காவிகள். x_n என்னும் எண்கள்

$$x_n=\frac{\mathbf{r}_n.(\mathbf{j}\times\mathbf{k})}{\mathbf{i}.(\mathbf{j}\times\mathbf{k})}$$

என்னும் வடிவத்தில் எழுதப்படக் கூடுமெனக் காட்டுக ;

y_n, z_n என்பனவற்றிற்கும் இரண்டு ஒத்த கோவைகள் தருக. $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ என்பனவற்றின் காவிப் பெருக்கத்தைக் கொண்டோ வேறு முறையாலோ

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=0$$

எனின், $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ என்பன ஒருதளமானவையெனக் காட்டுக. [Camb. P. N. S. 1957]

11. மூன்று தளங்களுக்கு $\mathbf{r}.\mathbf{l}=0$, $\mathbf{r}.\mathbf{m}=0$, $\mathbf{r}.\mathbf{n}=0$ என்னுஞ் சமன்பாடுகள் உண்டு ; இங்கு $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ என்பன அலகுக் காவிகள். $\mathbf{p}$ என்னுங் காவி இவ்வலகுக் காவிகளுக்குச் சமசாய்வில் இருக்க வேண்டிய நிபந்தனைகளைத் தருக. $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$, $\mathbf{n}$ என்பன முறையே (1, 2, 2), (2, 3, 6), (0, 3, 4) என்னுந் திசைகளைக் காட்டும் வகைக்கு அத்தகைக் காவியைக் காண்க. தன் அரையுச்சிக் கோணம் கோசை$^{-1}(1/\sqrt{(26)})$ ஆகி இத்தளங்கள் மூன்றையுந் தொடும் ஒரு கூம்பு உண்டெனெ இதிலிருந்து உய்த்தறிக ; இக்கூம்பின் காவிச சமன்பாட்டைத் தருக.

[Camb. P. N. S. 1950]

12. இரண்டு கோடுகளின் காவிச சமன்பாடுகள்

$$\mathbf{x}=\mathbf{a}+r\mathbf{l},\quad \mathbf{x}=\mathbf{b}+s\mathbf{m}$$

என்பன ; இங்கு, $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$ என்பன அலகுக் காவிகள் ; r, s என்பன எண்ணிப் பரமானங்கள். கோசை $\theta=\mathbf{l}.\mathbf{m}$ ஆகுமிடத்து, அவற்றிற்கு இடையிலுள்ள மிகக் குறுகிய தூரம்

$$[\mathbf{a}-\mathbf{b}, \mathbf{l}, \mathbf{m}] \text{ கோசை } \theta$$

என நிறுவுக.

செங்கோண் டெக்காட்டான் கூறுகளில் தம் சமன்பாடுகள்

$$x-c=y+c=6z, x=2(y-c)=-12(z+c)$$

ஆயுள்ள கோடுகளுக்கிடையிலுள்ள PP' என்னும் மிகக் குறுகிய தூரத்தைக் காண்க. PP' இன் மையத்தின் ஆள்கூறுகளையுங் காண்க. [Camb. P. M. 1945]

13. (i) λ, μ, ν என்பவற்றிற்கு முப்பரிமாணக் காவிகள் **a**, **b**, **c**, **d** பற்றிப் பின்வரும் சமன்பாட்டைத் தீர்க்க

$$\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}+\nu\mathbf{c}=\mathbf{d}.$$

(ii) ஒரு நான்முகியின் இரு சோடிப் பக்கங்கள் செங்குத்தாயின், மூன்றாவது சோடியும் செங்குத்தென்று காட்டுக. [Camb. N. S. 1953]

14. நிலைக்காவி **b** உள்ள ஒரு புள்ளி B யிலிருந்து $\mathbf{r}=\mathbf{a}+\lambda\mathbf{t}$ என்ற கோட்டுக்கான செங்குத்தின் அடி P ஆகும். கோடு BP யின் சமன்பாடு $\mathbf{r}=\mathbf{b}+\mu\mathbf{t}\times\{(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times\mathbf{t}\}$ என்று காட்டி, P யின் நிலையைக் காண்க. [Comb. P. N. S. 1953]

15. இரு காவிகள் **a**, **b** என்பவற்றின் காவிப் பெருக்கம் $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ என்பதை வரையறுத்து, **a**, **b** என்பவற்றின் தொடர்பில் அதன் திசையையும் பருமனையும் பற்றிச் சர்ச்சிக்க.

பின்வருஞ் சூத்திரங்களை நிறுவுக.

(i) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=(\mathbf{a}.\mathbf{c})\,\mathbf{b}-(\mathbf{a}.\mathbf{b})\,\mathbf{c}$,

(ii) $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})+\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{0}$.

OA, OB, OC என்பன முறையே $OB'C'$, $OC'A'$, $OA'B'$ என்னுந் தளங்களுக்குச் செங்குத்தாகுமாறு O என்னும் ஒரே உச்சியையுடைய $OABC$, $OA'B'C'$ என்னும் இரண்டு முமுகக் கோணங்கள் உண்டெனின், OAA', OBB' OCC' என்னுந் தளங்களுக்கு ஒரு கோடு பொதுவாகும். என்று (ii) ஐ மேலும் பிரயோகித்து அல்லது வேறு முறைப்படி காட்டுக.

[Lond G II 1959]

16. காவித் தொகுதியொன்றில் நேர்கோட்டுச் சாராமையை வலியுறுத்திச் சொல்வதன் பொருளென்னவென விளக்குக. **a**, **b**, **c** என்பன நேர்கோட்டுச் சாரா வெளிக் காவிகளின் p, q, r என்பன எண்களாயிருக்குமிடத்து வேறு யாதும் வெளிக்காவி **d** ஆனது

$$\mathbf{d}=p\mathbf{a}+q\mathbf{b}+r\mathbf{c}$$

என்னும் வடிவத்தில் உணர்த்தப்படலாமென நிறுவுக.

a, **b**, **c**, **d** என்பன $ABCD$ என்னும் ஒரு நான்முகியின் உச்சிகளின் நிலைக்காவிகளெனின், பின்வருவனவற்றை நிறுவுக ;

(i) $\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ என்னுங் காவியானது ABC என்னுந் தளத்திற்குச் செங்குத்தாயும் ABC என்னும் முக்கோணத்தின் பரப்பளவின் இரு மடங்குக்குச் சமனான பருமனுடையதாயும் இருக்கும்.

(ii) ABC என்னுந் தளத்தின் சமன்பாடு

$$\mathbf{x}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\mathbf{a}\times\mathbf{b})=(\mathbf{abc})$$

(iii) $ABCD$ என்னும் நான்முகியின் கனவளவு

$$\pm\tfrac{1}{6}\{(\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{c})-(\mathbf{b}\ \mathbf{c}\ \mathbf{d})-(\mathbf{c}\ \mathbf{a}\ \mathbf{d})-(\mathbf{a}\ \mathbf{b}\ \mathbf{d})\}.$$

[Lond. G. II 1960]

17. $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]=\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ எனின், கேத்திரகணிதமுறையாராய்வினால்

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]=[\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}]=-[\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}]$$

எனக் காட்டுக.

$R = l\mathbf{a} + m\mathbf{b} + n\mathbf{c}$, $\mathbf{G} = \mathbf{c} \times m\mathbf{b} + (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times n\mathbf{c}$ எனின்,

$\mathbf{R} \cdot \mathbf{G} = -(mn + nl + lm)\,[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ என நிறுவுக.

[Camb. N. S. I. 1943]

18. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ என்பன மூன்று ஒருதளக் காவிகள ; $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ எனபன முறையே b, c எனனும பருமனகளையுடையனவாய ஒனறுக்கொன்று செங்குததாய் உளளன. $\mathbf{r}$ எனபது யாதுமோர் உற்பததிக்கு ஆரைக காவியாய இருககு, λ எனபது $-\infty$ தொடங்கி ∞ வரைக்கும உளள எல்லாப் பெறுமானஙகளையும் எடுக்கும் ஓர் எண்ணிப் பரமானம எனின், $\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} + \lambda^2\mathbf{c}$ எனபது $\mathbf{b}^2/c$ எனனுஞ் செவ்வகததையும் $\mathbf{a} + (\mathbf{b}^2/4c^2)\,\mathbf{c}$ எனனுங குவியத்தையுமுடைய ஒரு பரவளைவைக குறிக்குமெனக காட்டுக.

அப்பரவளைவில் யாதுமொரு புள்ளி λ இல வரையபபடுந தொடலி $\mathbf{b} + 2\lambda\mathbf{c}$ எனனுங காவியின திசையிலும செவவன $2\lambda c^2\mathbf{b} - b^2\mathbf{c}$ எனனுங காவியின திசையிலும் உண்டெனறுங காட்டுக [Camb. P. N. S. 1955]

19. தந்த ஓர உற்பத்திபறறி மூனறு புளளிகளின நிலைககாவிகள $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ எனபன இககாவிகள ஒருதளக்காவிகளாதறகு வேண்டிய போதிய ஒரு நிபந்தனை $\mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q} \times \mathbf{R})$ பூச்சியமாதல எனபதேயெனக காட்டுக.

மையம் உற்பததியாக அலகாரையையுடைய ஒரு கோளததின மீதுளள மூனறு வேறுவேறு புளளிகளின நிலைககாவிகள $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ எனபன ; இஙகு, $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \neq 0$. $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ எனபன வறறிறகும $\mathbf{C}$, $\mathbf{A}$ என்பனவறறிற்கும $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ எனபனவறறிறகும் இடையிலுளள கோணஙகள முறையே a, b, c எனபன. $\mathbf{D} \cdot \mathbf{A} = \alpha$, $\mathbf{D} \cdot \mathbf{B} = \beta$, $\mathbf{D} \cdot \mathbf{C} = 0$ ஆகுமாறு ஒரு நாலாம புள்ளிக்கு $\mathbf{D}$ எனனும் நிலைககாவி உணடு. $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ எனபனவறறின தளததிறகுச செஙகுத்தான அதன கூறறின பருமன

$$\left|\frac{\alpha\,(\text{கோசை } c \text{ கோசை } a - \text{கோசை } b) + \beta\,(\text{கோசை } b \text{ கோசை } c - \text{கோசை } a)}{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}) \text{ சைன } c}\right|$$

எனக் காட்டுக

[Camb. M. T. 1959]

20. காவிப பெருககம் $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ எனபதறகு வரைவிலககணம கூறி, $\mathbf{u}$ அலகுப பருமன உடையதாயின $\{\mathbf{u} \times \mathbf{v}\} \times \mathbf{u}$ எனபது $\mathbf{v}$ இன $\mathbf{u}$ இறகுச் செஙகுததான கூறு எனக காட்டுக.

A யும் B யும் நிலைப்பட்ட புளளிகள. $\mathbf{w}$ எனபது AB யிறகுச செஙகுததான தரபபட்ட தொரு காவி. முபபரிமாண வெளியில பின்வரும் காவிச் சமன்பாடுகளால் வரையறுககபபடும ஒழுககினைக கேத்திரகணித முறையில விபரிகக :

(i) $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$, (ii) $\overrightarrow{AP} \times \overrightarrow{BP} = \mathbf{w}$.

[Lond. G. II, 1957]

21. $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{u}$ என்பன எவையேனும மூனறு காவிகளெனின,

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{u} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{u})\,\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{u})\,\mathbf{a}$$

எனக காட்டுக.

$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$ எனபதை எடுததுச சிநதித்தலாலோ வேறுமுறையாலோ

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]\,\mathbf{d} = [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}]\,\mathbf{a} + [\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{d}]\,\mathbf{b} + [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}]\,\mathbf{c}.$$

எனக் காட்டுக.

$\mathbf{d} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ஆகுமிடதது, வலபபககத்திலுள்ள மும்மைப பெருககங்களின் பெறுமானத்தை $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$ எனபனவற்றின எணணிப பெருககஙகள பறறிக கணிகக.

[Camb. P. M. 1960]

22. **A**, **B**, **C** என்பன மாறுத மூன்று ஒருதளமல்லாக் காவிகளாயிருக்க, **r** எனபது O இலிருந்து வரையப்படும் ஆரைக் காவியாகுமிடத்து, முறையே $\mathbf{r}.\mathbf{A}=1$, $\mathbf{r}.\mathbf{B}=1$, $\mathbf{r}.\mathbf{C}=1$ என்பனவற்றுலே தரப்படும் மூன்று தளங்களின் பொதுப் புள்ளிக்கு O இலிருந்து வரையப் படுங் காவியைக் காண்க.

a, **b**, **c**, **d** என்பன O இலிருநது வரையப்படும் நான்கு காவிகளெனின், அவற்றின முனைப் புள்ளிகளிலிருந்து சம தூரமான புள்ளி

$$\mathbf{r}=-\tfrac{1}{2}\frac{\mathbf{a}^2\{\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}\}+\mathbf{b}^2\{\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{d}\}+\mathbf{c}^2\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d}\}-\mathbf{d}^2\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}}{[\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{d}]+[\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{d}]+[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{d}]-[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]}$$

எனபதாலே தரப்படுமெனக காட்டுக;

இங்கு, $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}\equiv\mathbf{a}\times\mathbf{b}+\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\mathbf{c}\times\mathbf{a},$

$[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]\equiv\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$

[Camb. P. M. 1948]

23. $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ என்னுங் காவித தொகுதிககு நிகர்மாற்முன $\mathbf{b}_1,\mathbf{b}_2,\mathbf{b}_3$ என்னுங் காவித தொகுதி $v_a=\mathbf{a}_1.\mathbf{a}_2\times\mathbf{a}_3$ ஆகுமிடத்து

$$\mathbf{b}_1=\frac{\mathbf{a}_2\times\mathbf{a}_3}{v_a},\quad \mathbf{b}_2=\frac{\mathbf{a}_3\times\mathbf{a}_1}{v_a},\quad \mathbf{b}_3=\frac{\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2}{v_a}.$$

என்பனவற்றால் வரையறுக்கப்படும்.

$$\mathbf{b}_1.\mathbf{b}_2\times\mathbf{b}_3=1/\mathbf{a}_1.\mathbf{a}_2\times\mathbf{a}_3$$

எனக் காட்டுக.

$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ என்பனவறறிற்குச் சமாந்தரமான அச்சுக்கள் O என்னும ஒரு புள்ளியிலிருநது எடுககப்படுகின்றன ; அவ்வசசுககளின் மீது $\mathbf{a}_1/h_1$, $\mathbf{a}_2/h_2$, $\mathbf{a}_3/h_3$ என்பனவற்றிற்கு விகித சமமான வெட்டுத துண்டுகளை ஒரு தளம் வெட்டுகின்றது. இத்தளம் $h_1\mathbf{b}_1+h_2\mathbf{b}_2\times h_3\mathbf{b}_3$ எனபதன் திசைககுச செஙகுததெனக் காட்டுக

[Camb. P. N. S. 1945]

24. **P**, **Q** எனனும் இரண்டு காவிகளின் காவிப பெருக்கத்தை வரையறுக்க ;

$$\mathbf{P}\times(\mathbf{Q}\times\mathbf{R})=\mathbf{Q}\,(\mathbf{P}.\mathbf{R})-\mathbf{R}\,(\mathbf{P}.\mathbf{Q})$$ என நிறுவுக.

P, **Q**, **R** எனனும் மூன்று ஒரு தளமல்லாக் காவிகள் தரப்பட்டால், **X** என்னும் ஓர் எதேச்சையான காவியை

$$\mathbf{X}=(\mathbf{X}.\mathbf{P}')\,\mathbf{P}+(\mathbf{X}.\mathbf{Q}')\,\mathbf{Q}+(\mathbf{X}.\mathbf{R}')\,\mathbf{R}$$

எனனும வடிவததில் எவ்வாறு விரிக்கலாம எனபதைக காட்டுக.

P, **Q**, **R** எனபன அலகுக் காவிகளின ஒரு நிமிர்கோண மூவடையை ஆகின்றமுன

$(\mathbf{P}'\times\mathbf{Q}').\mathbf{R}'=1/(\mathbf{P}\times\mathbf{Q}).\mathbf{R}$ என்றும்

$\mathbf{P}=\mathbf{P}'$, $\mathbf{Q}=\mathbf{Q}'$, $\mathbf{R}=\mathbf{R}'$ எனறுங் காட்டுக

[Camb. M. T. 1960]

25. $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ எனபன மூன்று காவிகள் காவிகள் $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$ என்பன பின்வருமாறு வரையறுககப்படும் :

$$\mathbf{b}_1=\frac{\mathbf{a}_2\times\mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_1.\mathbf{a}_2\times\mathbf{a}_3},\quad \mathbf{b}_2=\frac{\mathbf{a}_3\times\mathbf{a}_1}{\mathbf{a}_1.\mathbf{a}_2\times\mathbf{a}_3},\quad \mathbf{b}_3=\frac{\mathbf{a}_1\times\mathbf{a}_2}{\mathbf{a}_1.\mathbf{a}_2\times\mathbf{a}_3}.$$

$\mathbf{R}=r_1\mathbf{a}_1+r_2\mathbf{a}_2+r_3\mathbf{a}_3$ ஆயும், $\mathbf{K}=k_1\mathbf{b}_1+k_2\mathbf{b}_2+k_3\mathbf{b}_3$ ஆயும் இருந்தால்,

$$\mathbf{R}.\mathbf{K}=r_1k_1+r_2k_2+r_3k_3$$

எனக் காட்டுக.

$\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ என்பன ஒன்றேடொன்று $60°$ ஆன கோணங்களை ஆக்கி நிற்கும் அலகுக் காவிகளெனின், r_1, r_2, r_3, k_1, k_2, k_3 என்பன பற்றி **R**, **K** என்பனவற்றிற்கிடையிலுள்ள கோணத்தைக் காண்க.

[Camb. N. S. I. 1955]

26. மூன்று காவிகள் $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ என்பன தரப்பட்டுள்ளன; A யானது $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ என்பனவற்றின் மும்மைப் பெருக்கத்தைக் குறிக்குமிடத்து,

$$\mathbf{b}^1 = A^{-1}\,\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3, \quad \mathbf{b}^2 = A^{-1}\,\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1, \quad \mathbf{b}^3 = A^{-1}\,\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2.$$

$\mathbf{b}^1$, $\mathbf{b}^2$, $\mathbf{b}^3$ என்பனவற்றின் மும்மைப் பெருக்கம் B யானது A^{-1} என நிறுவுக. அன்றியும், $\mathbf{a}_1 = B^{-1}\,\mathbf{b}^2 \times \mathbf{b}^3$, $\mathbf{a}_2 = B^{-1}\,\mathbf{b}^3 \times \mathbf{b}^1$, $\mathbf{a}_3 = B^{-1}\,\mathbf{b}^1 \times \mathbf{b}^2$ என்றும் $\mathbf{a}_i . \mathbf{b}^k = \delta_i^k$ என்றும் நிறுவுக,

$\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ என்பன எவையேனும் இரண்டு காவிகளாயிருக்க, கூட்டல் $i = 1, 2, 3$ என்னும் பெறுமானங்களைத் தழுவுமிடத்து,

$$\mathbf{u} = \sum u^i \mathbf{a}_i = \sum u_i \mathbf{b}^i, \; \mathbf{v} = \sum v^i \mathbf{a}_i = \sum v_i \mathbf{b}^i$$

எனின், $\mathbf{u}.\mathbf{v} = \sum u^i v_i$ என்றும

$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = A\,(u^2v^3 - u^3v^2)\,\mathbf{b}^1 + \ldots$ என்றுங் காட்டுக.

[Camb. P. N. S. 1959]

[$i = k$ ஆகும்போது $\delta_i^k = 1$; மற்றுமடி பூச்சியம்]

27. $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_4$ என்பன நான்கு காவிகள் ; $\mathbf{b}_1$ ஆனது $\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3 + \mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_4 \times \mathbf{a}_2$ என்னுங் காவி ; $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_3$, $\mathbf{b}_4$, என்பன 1, 2, 3, 4 என்னுங் கீழ்க் குறிகளின் ஒரு சக்கர வரிசை மாற்றத்தினால் $\mathbf{b}_1$ இலிருந்து பெறப்படும்.

$$\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_4,$$

$$(\mathbf{a}_1 \times \mathbf{b}_1) - (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{b}_2) + (\mathbf{a}_3 \times \mathbf{b}_3) - (\mathbf{a}_4 \times \mathbf{b}_4)$$

என்னுங் காவிகள் ஒவ்வொன்றும் மறையுமென்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க.

[Camb. M. T. II 1951]

28. பின்வரும் கோவைகளை விரிக்க :

(i) $(\mathbf{l} \times \mathbf{m}).(\mathbf{l} \times \mathbf{n})$, (ii) $(\mathbf{l} \times \mathbf{m}) \times (\mathbf{l} \times \mathbf{n})$.

பின்னர், ஓர் ஒழுங்கான நான்முகியின் இரு முகங்களுக்கிடையிலான கோணம் கோசை$^{-1}\frac{1}{3}$ என நிறுவுக.

நிறுவுக :

$$\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\,\delta_{km} - \delta_{jm}\,\delta_{kl}$$

இதிலிருந்து அல்லது பிறவகையில், $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ என்பதற்கு ஒரு விரிவு பெறுக.

[ε_{ijk} என்பது, i, j, k என்பவற்றுள் இரண்டு அல்லது யாவும் ஒரே பெறுமதியின எனின் பூச்சியமாகும் ; i, j, k என்பன 1, 2, 3 இன் சக்கர வரிசைமாற்றமாயின் $+1$ ஆகும் ; வேறு விதமாய் இருப்பின் -1 ஆகும்.]

[Camb. P. N. S. 1948]

29. (இயூக்கிளீடிய முப்பரிமாண வெளியிலுள்ள) எத்தளத்தினதும சமன்பாட்டை

$$\mathbf{r}.\mathbf{k} = p$$

என்னும் வடிவத்தில் இடலாம் என நிறுவுக. இங்கு $\mathbf{k}$ என்பது அலகுக் காவி, p என்பது மறை அல்லாத ஒரு மெய் எண்.

மேற்படி நியம வடிவிலான $\mathbf{r}.\mathbf{k}_1 = p_1$, $\mathbf{r}.\mathbf{k}_2 = p_2$ என்னும் சமனபாடுகளை முறையே உடைய இரு சமாந்தரமல்லாத தளங்களில் $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, என்பவற்றில் மையங்களை உடைய அலகு வட்டங்கள வரையப்படுகின்றன.

$$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).(\mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}_2) = 0,$$

ஆகவும்

$$(p_1 - \mathbf{k}_1.\mathbf{r}_2)^2 = (p_2 - \mathbf{k}_2.\mathbf{r}_1)^2,$$

ஆகவும் இருப்பின் மட்டுமே இவ்விரு வட்டங்களினூடாகவும் செல்கின்ற கோளம் ஒன்று உண்டெனை நிறுவுக.

[Camb. MT. 1962]

30. (i) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}).(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = (\mathbf{a}.\mathbf{c})(\mathbf{b}.\mathbf{d}) - (\mathbf{a}.\mathbf{d})(\mathbf{b}.\mathbf{c})$,

(ii) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}).(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = [\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{d}]\,\mathbf{b} - [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}]\,\mathbf{a}$,

என்று காட்டுக.

அதிகாரம் 3

காவி நுண்கணிதம்

3.1. ஓர் எண்ணியின் காவிச்சார்பு

ஓர் எண்ணி மாறி t இன் ஒவ்வொரு பெறுமானத்திற்கும் வெளியில ஒரு காவி $\mathbf{Q}$ நியமிக்கப்படுகின்றதென நினைக்க. எனின், $\mathbf{Q}$ வானது மாறி t இன் ஒரு காவிச் சார்பாகத் தரப்படுகின்றதெனக் கூறப்படும். t ஆனது மாற $\mathbf{Q}$ வானது பொதுவாகப் பருமன் திசை என்னும் இரண்டிலும் மாறும். $\mathbf{Q}$ வை நாம் $\mathbf{Q}(t)$ என எழுதலாம்.

உதாரணமாக, $\mathbf{r}$ ஆனது நேரம் t இல் ஓர் அசையுந் துணிக்கையின் நிலைக் காவியெனின், $\mathbf{r}$ ஆனது t இன் ஒரு காவிச் சார்பாகும்.

$\mathbf{Q}$ வானது நிலையான மாட்டேற்றச்சுக்களின வழியே தன் கூறுகள பற்றி

$$\mathbf{Q}(t) = Q_x(t)\mathbf{i} + Q_y(t)\mathbf{j} + Q_z(t)\mathbf{k} \tag{1}$$

என்னும் வடிவத்தில் உணர்த்தப்படின், Q_x, Q_y, Q_z என்னுங் கூறுகள் t இன் எண்ணிச் சார்புகளாகும். இங்கு $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ என்பன அம்மூன்று அச்சுக்களின் நீளத்திற்குமுள்ள அலகுக் காவிகள்.

உதாரணமாக,

$$\mathbf{Q} = t^2\mathbf{i} + \text{சைன}\ t\mathbf{j} + (1-t)\mathbf{k} \tag{2}$$

என்பது எண்ணி மாறி t இன் ஒரு காவிச் சாரபு.

மாறி t ஆனது t_0 ஐ அணுக ஒரு காவிச சாரபின் எல்லை பறறிய கொள் கருத்தும் t ஆனது t_0 இற்குச் சமனுகுமிடத்து அச்சார்பின் தொடர்ச்சி பற்றிய கொள் கருத்தும் எண சார்புகளுக்குப் போல ஆராய்ந் தறியப்படலாம்.

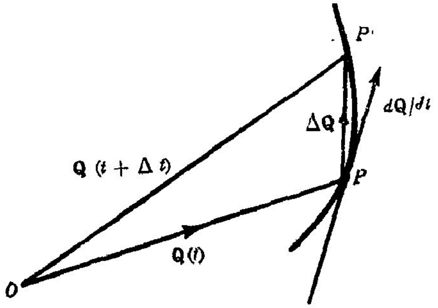
எண்ணி மாறி t பற்றி ஒரு காவிச் சார்பு $\mathbf{Q}$ வின் வகையீட்டுக குணகம் அல்லது பெறுதி பின்வரும் எல்லையாக வரையறுக்கப்படும்.

$$\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = \underset{\Delta t \to 0}{\text{எல்}} \frac{\Delta\mathbf{Q}}{\Delta t}; \tag{3}$$

இங்கு,
$$\Delta\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(t+\Delta t) - \mathbf{Q}(t) \tag{4}$$

எல்லையுறும் முறைமைக்கு ஒரு கேத்திரகணிதப் படம் வரைதல் பயன் படும். O என்பது ஒரு தக்க உறபத்தியாகுக ; காவி $\mathbf{Q}$ வானது கோட்டுத் துண்டு OP யாற் குறிக்கப்படுக. t ஆனது மாற, துண்டு OP யின் முனை P யானது ஒரு வளையியை வரையும் (படம 1).

நேரம் $t+\Delta t$ இல, அம்முனை P' இல் இருக்கின்றதெனக் கொள்க. காவி $\Delta\mathbf{Q}=\mathbf{Q}(t+\Delta t)-\mathbf{Q}(t)$ ஆனது கோட்டுத் துண்டு PP' ஆற் குறிக்கப்படும். $\Delta\mathbf{Q}/\Delta t$ ஆனது காவி $\Delta\mathbf{Q}$, எண் $1/\Delta t$ என்பனவற்றின் பெருக்கமாதலால் ஒரு காவியாகும். ஆகவே, $\Delta t\to 0$ ஆக அதன் எல்லை, அதாவது $\mathrm{d}\mathbf{Q}/\mathrm{d}t$ என்பதும் ஒரு காவியாகும். இக் காவியின் திசை P' என்பது P யை அணுக நாண் PP' இன் எல்லையுறும் நிலையின் நீளத்திற்கு, அதாவது P யில் அவ்வளையியினது தொடலி வழியே இருக்கும்.



படம் 1

$\mathbf{Q}$ வானது சமன்பாடு (1) இற் போலத் தன் கூறுகள் பற்றி உணர்த்தப படின்,

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{Q}&=\mathbf{Q}(t+\Delta t)-\mathbf{Q}(t)\\&=Q_x(t+\Delta t)\mathbf{i}+Q_y(t+\Delta t)\mathbf{j}+Q_z(t+\Delta t)\mathbf{k}\\&\quad-Q_x(t)\mathbf{i}-Q_y(t)\mathbf{j}-Q_z(t)\mathbf{k}\\&=\Delta Q_x\mathbf{i}+\Delta Q_y\mathbf{j}+\Delta Q_z\mathbf{k}.\end{aligned}$$

எனின், எல்லைக்குச் செல்ல நாம் பெறுவது

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}Q_x}{\mathrm{d}t}\mathbf{i}+\frac{\mathrm{d}Q_y}{\mathrm{d}t}\mathbf{j}+\frac{\mathrm{d}Q_z}{\mathrm{d}t}\mathbf{k}. \tag{5}$$

இச்சமன்பாட்டை நாம் பின்வருமாறு எழுதலாம் :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Q_x, Q_y, Q_z)=\left(\frac{\mathrm{d}Q_x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}Q_y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}Q_z}{\mathrm{d}t}\right) \tag{6}$$

யாதும் ஓர் அச்சின் வழியே பெறுதிக் காவி $\mathrm{d}\mathbf{Q}/\mathrm{d}t$ இன் கூறு அவ்வச்சின் நீளத்திற்கு $\mathbf{Q}$ வின் கூற்றின் பெறுதிக்குச் சமன்.

இரண்டாம் பெறுதியும் அதனிலும் உயர்ந்த பெறுதிகளும் எண்ணிச் சார்புகளைப் போல வரையறுக்கப்படலாம். இவ்வாறு

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathbf{Q}}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}t}\right) \tag{7}$$

$\mathbf{r}$ என்பது நேரம் t இல் ஒரு துணிக்கையின் நிலைக் காவியெனின், பெறுதிக் காவி $\mathrm{d}\mathbf{r}/\mathrm{d}t$ ஆனது வேகக் காவியாகும்; அது t என்னுங் கணத்திற்கு உரிய புள்ளியில் அத்துணிக்கையின் வழியினது தொடலி வழியே இருக்கும். இரண்டாம் பெறுதி $\mathrm{d}^2\mathbf{r}/\mathrm{d}^2t$ ஆனது கணம் t இல் ஆர்முடுகற் காவியாகும்.

$\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ என்பன t இன் காவிச் சார்புகளாயும் λ என்பது t இன் ஒரெண் சார்பாயும் இருக்குமிடத்து, காவிச் சார்புகளை வகையிடுதற்குரிய பின்வரும் விதிகளை எளிதில் வாய்ப்புப் பார்க்கலாம் :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{Q}+\mathbf{R})=\frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}}{\mathrm{d}t} \tag{8}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\lambda\mathbf{Q})=\lambda\frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}\mathbf{Q} \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{Q}.\mathbf{R})=\mathbf{Q}.\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}t}.\mathbf{R} \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathbf{Q}\times\mathbf{R})=\mathbf{Q}\times\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}t}\times\mathbf{R}. \tag{11}$$

உதாரணமாக, தொடர்பு (10) ஐ நிறுவுதற்கு, $\mathbf{Q}+\Delta\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}+\Delta\mathbf{R}$ என்பன நேரம் $t+\Delta t$ இல் $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ என்பனவற்றின் பெறுமானங்களெனக் கொள்க.

எனின்,

$$\frac{(\mathbf{Q}+\Delta\mathbf{Q}).(\mathbf{R}+\Delta\mathbf{R})-\mathbf{Q}.\mathbf{R}}{\Delta t} \tag{12}$$

$$=\mathbf{Q}.\frac{\Delta\mathbf{R}}{\Delta t}+\frac{\Delta\mathbf{Q}}{\Delta t}.\mathbf{R}+\frac{\Delta\mathbf{Q}.\Delta\mathbf{R}}{\Delta t}; \tag{13}$$

Δt ஆனது பூச்சியத்தை அணுக, இது எல்லையுறும்போது

$$\mathbf{Q}.\frac{\mathrm{d}\mathbf{R}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}t}.\mathbf{R} \tag{14}$$

என்பதை அணுகும்; (13) இலுள்ள ஈற்றுறுப்பு எல்லையுறுதற்கண் மறையும்.

காவிப் பெருக்கத்திற் காரணிகளின் ஒழுங்கு அவதானத்தோடு காக்கப் படல் வேண்டும் என்பதைத் தவிர, பொதுவாக, காவிகளை வகையிடல் சமன்பாடு (9) இற்போல, பொது வகையீட்டு நுண்கணிதத்திலுள்ள அவ்விதிகளையே பின்பற்றும். சமன்பாடு (11) இல் ஒவ்வோர் உறுப்பிலும் $\mathbf{Q}$ வானது $\mathbf{R}$ இன் இடப்பக்கத்தில் வைக்கப்பட்டிருத்தல் காணலாம்.

பொதுவாக,

$$\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}}{\mathrm{d}t}\right|\neq\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|\mathbf{Q}| \tag{15}$$

என அவதானிப்போம் ; அதாவது, அக் காவியின் பெறுதியின் பருமன் பொதுவாக அக்காவியின் பருமனின் பெறுதிக்குச் சமனன்று.

$$\mathbf{Q}.\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^2 = |\mathbf{Q}|^2 \tag{16}$$

என்னுந் தொடர்பிலிருந்து வகையிடுதலால் நாம் பெறுவது

$$2\mathbf{Q}\cdot\frac{d\mathbf{Q}}{dt} = 2|\mathbf{Q}|\frac{d}{dt}|\mathbf{Q}|,$$

அதாவது,

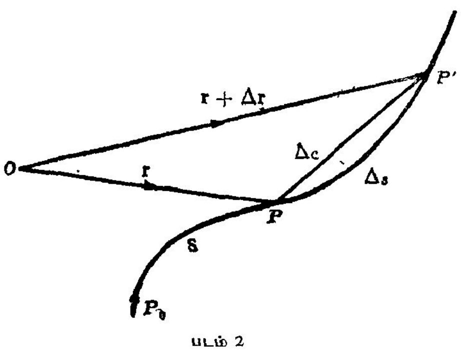
$$\frac{d}{dt}|\mathbf{Q}| = \frac{\mathbf{Q}}{|\mathbf{Q}|}\cdot\frac{d\mathbf{Q}}{dt} \tag{17}$$

$\mathbf{Q}/|\mathbf{Q}|$ என்பது $\mathbf{Q}$ இன் திசையில் ஓர் அலகுக் காவி ; $(d/dt)|\mathbf{Q}|$ ஆனது $\mathbf{Q}$ இன் திசையில் $d\mathbf{Q}/dt$ இன் கூற்றுக்குச் சமனெனச் சமன்பாடு (17) இற்கு விளக்கம் கூறலாம்.

3.2. அலகுத் தொடலிக் காவி T

ஓா எண்ணி மாறி பற்றி ஒரு காவிச் சார்பின் பெறுதிக்கு, முப்பரிமாண வெளியில் ஒரு வளையிக்கான அலகுத் தொடலிக் காவி உதாரணமாகும்.

P_0 ஆனது ஒரு வளையியின்மீது ஒரு நிலையான புள்ளியென்றும் P யானது அவ்வளையியின்மீது நிலைக்காவி $\mathbf{r}$ ஒடு கூடிய ஒரு மாறும் புள்ளியென்றும் நினைக்க (படம் 2).



படம் 2

வில் நீளம் P_0P யானது s இனாற் குறிக்கபபடுக. P' ஆனது அவ்வளையி மீது P யிற்கு ஓர் அயற்புள்ளியாகுக ; அதன் நிலைக்காவி $\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r}$ ஆகுக. Δs என்பது விற்றூரம் PP' ஆகுக ; Δc என்பது நாண் PP' இன் நீளமாகுக. துண்டு $\overrightarrow{PP'}$ ஆனது தன் நீளம் Δc ஆயுள்ள காவி $\Delta\mathbf{r}$ ஐக்

குறிக்கும் ; ஆகவே, $(\Delta c)^2 = (\Delta \mathbf{r})^2$. $\Delta \mathbf{r}$ ஆனது PP' வழியே ஒரு காவியாயும் $1/\Delta s$ ஆனது ஓர் எண்ணிக் கணியமாயும் இருத்தலால், $\Delta \mathbf{r}/\Delta s$ ஆனது PP' இன் திசையில் ஒரு காவியாகும். $\Delta s \to 0$ ஆக, P' என்னும் புள்ளி P என்னும் புள்ளியை அணுகும் ; PP' என்னும் நாண் P யில் அவ்வளையியின் தொடலியை அணுகும் ; அன்றியும், $\Delta s \to 0$ ஆக, $\Delta c/\Delta s$ ஆனது எல்லை 1 ஐ அணுகும். எனின்,

$$\Delta s \to 0 \text{ ஆக, } \left(\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s}\right)^2 = \left(\frac{\Delta c}{\Delta s}\right)^2 \to 1.$$

ஆகவே, காவி

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} = \underset{\Delta s \to 0}{\text{எல்}} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta s}$$

என்பதற்கு அலகுப் பருமன் உண்டு ; அது P யில் அவ்வளையிக்கு வரையப்படுந் தொடலியின் வழியே இருக்கும்.

எனின்,

$$\mathbf{T} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right) \tag{18}$$

என்பது P யில் அவ்வளையிக்கு வரையப்படுந் தொடலி வழியே உள்ள அலகுக் காவியாகும்.

எடுத்துக்காட்டு : முப்பரிமாண வெளியில் ஒரு வளையியின் சமன்பாடுகள்

$$x = a \text{ கோசை } \theta, \quad y = a \text{ சைன் } \theta, \quad z = c\theta$$

என்பனவற்றால் θ எனனும் ஒரு பரமானம் பற்றித் தரப்பட்டுள்ளன ; இங்கு, (x, y, z) எனபன செங்கோணவாள்கூறுகள ; a, c என்பன மாறிலிகள். பரமானம் θ இற்கு உரிய புள்ளியில் அலகுத் தொடலிக் காவியைக் காண்க.

s ஆனது அவ்வளையியின் மீது ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து உள்ள விற்றூரத்தைக குறித்தால, சமனபாடு

$$\left|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}\right|^2 = 1 \text{ தருவது}$$

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 \tag{19}$$

$$= a^2 \text{ சைன்}^2\, \theta (\mathrm{d}\theta)^2 + a^2 \text{ கோசை}^2\, \theta (\mathrm{d}\theta)^2 + c^2 (\mathrm{d}\theta)^2$$

$$= (a^2 + c^2)\, (\mathrm{d}\theta)^2.$$

எனின்,

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\sqrt{(a^2 + c^2)}}, \tag{20}$$

θ ஆனது கூடுதலுறும் போக்கில் s ஐ அளத்தலால், மூலத்தின் நேர்ப் பெறுமானத்தை எடுக்குமிடத்து.

தன் பரமானம் θ ஆயுள்ள புள்ளியில் அலகுத் தொடலிக் காவி

$$\mathbf{T}=\left(\frac{dx}{ds},\frac{dy}{ds},\frac{dz}{ds}\right)=\left(-a \text{ சைன் } \theta\frac{d\theta}{ds}, a \text{ கோசை } \theta\frac{d\theta}{ds}, c\frac{d\theta}{ds}\right)$$

$$=\left[-\frac{a}{\sqrt{(a^2+c^2)}} \text{ சைன் } \theta, \frac{a}{\sqrt{(a^2+c^2)}} \text{ கோசை } \theta, \frac{c}{\sqrt{(a^2+c^2)}}\right] \tag{21}$$

3.3. காவிச் சார்புகள்

ஒரு காவி மாறி தரப்படும் போதெல்லாம் ϕ ஆனது அறியப்பட்ட ஓர் எண்ணிக்கணியமெனெ நினைக்க. அக்காவி மாறியை $\mathbf{r}$ ஆற் குறித்தால், சார்பு ϕ ஆனது காவி $\mathbf{r}$ இன் ஓர் எண்ணிச் சார்பெனப்படும் ; அது

$$\phi(\mathbf{r}) \tag{22}$$

என எழுதப்படலாம். $\overrightarrow{OP}=\mathbf{r}$ ஆகுமாறு முப்பரிமாண வெளியொன்றில் ஒரு நிலையான உற்பத்தி O பற்றி ஒரு மாறும் புள்ளி P யின் நிலைக்காவி யாக $\mathbf{r}$ ஐ நாம் எண்ணலாம். எனின், ϕ ஆனது மாறும் புள்ளி P யின் சார்பாகக் குறிக்கப்படும் ; அது $\phi(P)$ என்னுங் குறியீட்டினாலாதல் $\phi(x, y, z)$ என்னுங் குறியீட்டினாலாதல் குறிக்கப்படும் ; இங்கு, x, y, z என்பன ஒரு செங்கோணவாள் கூற்றுத் தொகுதியில் $\mathbf{r}$ இன் கூறு களாகும்.

புள்ளி P மாறத் தானும் மாறும் சாாபு $\phi(P)$ ஆனது ஒரு **புலத்தை** வரையறுக்குமெனப்படும் ; இவ்வகையில், சார்பு ϕ ஆனது ஓர் எண்ணியா யிருத்தலால், இப்புலம் ஓர் **எண்ணிப் புலம்** எனப்படும். உதாரணமாக, $\phi(P)$ என்பது ஒரு வாயுவின் வேறு வேறு புள்ளிகள் P யிலுள்ள வெப்பநிலையாதல் கூடும். வெப்பநிலையானது ஓர் எண்ணிக் கணியம் ; வெப்பநிலைப் புலம் ஓர் எண்ணிப் புலத்தின் உதாரணமாகும்.

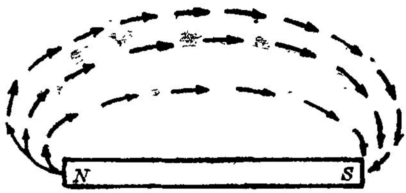
அதுபோல, காவி நிலைச் சார்புகளை

$$\mathbf{Q}(P) \text{ அல்லது } \mathbf{Q}(\mathbf{r}) \tag{23}$$

என நாம வரையறுக்கலாம். அத்தகைச் சார்பு வரையறுக்கும் புலம் காவிப்புலமாகும். அத்தகைப்புலம் வெளியின் ஒவ்வொரு புள்ளியோடும் பருமனும் திசையும் ஒருங்குள்ள ஒரு காவிக் கணியத்தைத் தொடர்பு படுத்தும். அத்தகைய காவி புள்ளி P யின் ஒரு சார்பாகையால், புள்ளிக் காவி எனவும் படும்.

ஒரு காவிப் புலத்துக்குத் ஒரு காந்தப் புலம் திருட்டாந்தமாகும் காந்தச் சட்டமும் இரும்புத் தூளும் கொண்ட ஒரு பரிசோதனை ஒவ்வொரு புள்ளி யோடுந் திசையும் பருமனும் ஒருங்கு கொண்ட ஒரு காந்தப்புலம் $\mathbf{Q}$ வின்

தொடர்பைக் காட்டும். வெளியில் வெவ்வேறு புள்ளிகளில் அக்காந்தப் புலத்திற்கு வெவ்வேறு பருமன்களுந் திசைகளும் உண்டு (படம் 3).



படம் 3

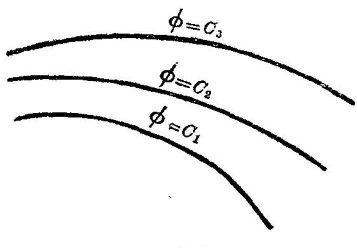
காவிப்புலத்தின் உதாரணங்களுள் நமக்குப் பழக்கமானவை நிலை மின் விசைப்புலம், ஈர்ப்பு விசைப்புலம், அசையும் பாயியின் வேகப்புலம் என்பவை.

3.4. புலப்படம்

$$\phi(\mathbf{r}) = \text{மாறிலி} \tag{24}$$

என்னும் பரப்பினத்தை மாறிலியின் வெவ்வேறு பெறுமானங்களுக்கு முப்பரிமாண வெளியில் வரைதலால், $\phi(\mathbf{r})$ என்னும் ஓர் எண்ணிப் புலத்தைப் படமாக வரையலாம்.

அத்தகைய பரப்புக்கள் இரண்டு பொதுவாக ஒன்றையொன்று வெட்டா. இவ்வுடைமை உண்மையன்றென்றும், C_1, C_2 என்பன மாறிலிகளாயும் P யானது ஒரு வெட்டுப் புள்ளியாயும் இருக்குமிடத்து $\phi = C_1$, $\phi = C_2$ என்னும் இரு பரப்புக்கள் ஒன்றையொன்று வெட்டுமென்றும் நினைக்க. P யானது $\phi(P) = C_1$ என்னும் முதற் பரப்பின் மீது கிடத்தலாலும், P யானது $\phi(P) = C_2$ என்னும் இரண்டாம் பரப்பின் மீது கிடத்தலாலும், ϕ ஆனது ஓர் ஒற்றைப் பெறுமானச் சார்பெனின் $C_1 = C_2$ ஆயினாலன்றி, இந்நிபந்தனைகள் இரண்டும் யாதுமொரு புள்ளி P யால் ஒருங்கு திருப்திப் படல் முடியாது.



படம் 4

இப்பரப்புக்கள் **மட்டப் பரப்புக்கள்** எனறறியப்படும். நாம் எடுத்துச் சிந்திக்கும் வெளிப் பிரதேசத்தை, ஒன்றையொன்று வெட்டாத மட்டப் பரப்புக்களின் ஒரு தொகுதியால் நாம் பிரிக்கலாம்.

காட்டு 1. புவிப்பரப்பின் அண்மையில், புவியீர்ப்புப் புலத்தில் ஒரு திணிவுத் துணிக்கை m இன் அழுத்தச் சக்தி

$$\phi = mg(z - z_0) \tag{25}$$

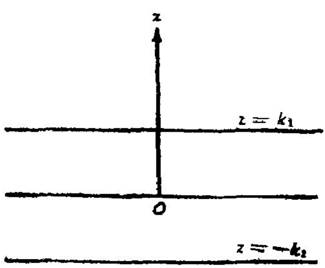
என்னும் வடிவத்தில் இருக்கும். இங்கு, z – அச்சு மேன்முகமாக நிலைக் குத்தாயிருக்கும் ; g ஆனது புவியீர்ப்புக் காரணமாயுள்ள ஆர்முடுகல் ; z_0 ஆனது ஒரு மாறிலி ; மட்டப் பரப்புக்கள்

$$mg(z - z_0) = \text{மாறிலி}$$

அதாவது,
$$z = \text{மாறிலி} \tag{26}$$

என்பதாலே தரப்படும்.

இங்கு, k_1, k_2 என்பன நேர் மாறிலிகளாயிருக்குமிடத்து மட்டப் பரப்புக்கள் ஒரு கிடைத்தளத் தொகுதியாகும் (படம்) 5).



படம் 5

காட்டு 2. A யில் மின்னேற்றம e காரணமாகவும் B யில் மின்னேற்றம் e காரணமாகவும் ஒரு புள்ளி P யில் உள்ள நிலைமின்னழுத்தம்

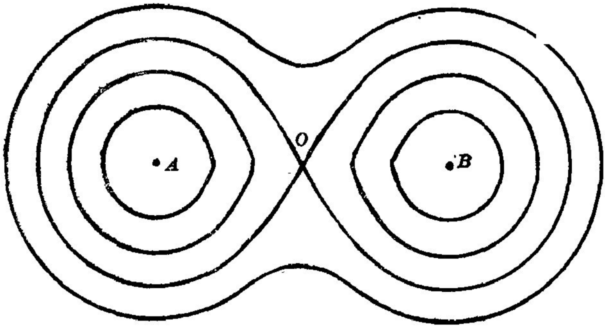
$$\phi = \frac{e}{r} + \frac{e}{r'}; \tag{27}$$

இங்கு, $r = AP$, $r' = BP$. இங்கு மட்டப் பரபபுக்களானவை **சமவழுத்தப் பரப்புக்கள்** என்று கூறப்படும ; அவை

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = \text{மாறிலி} \tag{28}$$

என்பதாலே தரப்படும.

AB யிற்கூடாகச் செல்லும் ஒரு தளத்தால் ஆகும் இப் பரப்புக்களின் பிரிவு ஒன்றை எடுத்துச் சிந்திப்போம். ஆறும் படியுள்ள வளையித் தொகுதி ஒன்றைப் பெறுவோம். இவ்வளையிகளின் பருமட்டியான ஒரு வரைவு படம் 6 இல் தரப்பட்டுள்ளது.



படம் 6

AB யின் நடுப்புள்ளி *O* விற்கூடாகச் செல்லுஞ் சமவழுத்தப் பரப்பிறகுச் சில சிறப்புத் தன்மைகள் உண்டு. *O* வானது ஓர் அசாதாரணமான புள்ளி ; அதற்குக் காரணம் அதற்கூடாகச் செல்லுஞ் சமவழுத்தப் பரப்பு *O* வில் தன்னைத்தானே வெட்டும் என்பதே. *O* வில்

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}=\frac{\partial \phi}{\partial y}=\frac{\partial \phi}{\partial z}=0.$$

அது ஒரு சமநிலைப்புள்ளி. *O* விற்கு அண்மையில், சமவழுத்தப் பரப்பு ஓர் இரட்டைத் தொடலிக்கூம்பாகும். மாறி ϕ இன் பெரிய நேர்ப் பெறுமானங்களுக்குச் சமவழுத்த வளையிகள் *A* யையாதல் *B* யையாதல் சுற்றிச் செல்லும் மூடிய சிறு வளையிகளாகும். $\phi=2e/a$ ஆகுமிடதது, *O* விற்கூடாகச் செல்லுஞ் சிறப்பு வளையியைப் பெறுவோம். ϕ ஆனது $2e/a$ இலுஞ் சிறிதாகுமிடத்து, சமவழுத்த வளையியானது *A*, *B*, *O* என்பனவறறைச் சுற்றிச் செல்லும் ஒரு மூடிய பெரும் வளையியாகும் ; ϕ ஆனது சிறிது சிறிதாக, உரிய வளையி பெரிது பெரிதாகும்.

காவிப் புலங்களைப் படமாக்கலும் பயனுடைத்து. ஒரு காவிப்புலம் **A** தரப்பட்டிருப்பின் ஓர் **A** – கோடு எனபது, தன்மீதுளள எப்புள்ளியிலேனும் உள்ள தொடலி அப்புள்ளியிலான காவி **A** யின் திசை ஆகுமாறுள்ள வளையி என்று வரையறுக்கப்படும். ஓர் **A** – கோடு பின்வரும் வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளை நிறைவுறுத்தும்.

$$\frac{dx}{A_x}=\frac{dy}{A_y}=\frac{dz}{A_z}$$

ஏதும் ஒரு மூடிய வளையி C யின் புள்ளிகளூடாக வரைந்த **A** – கோடு, **A** – குழாய் எனப்படும் குழாய்வடிவான ஒரு பரப்பை ஆக்கும்.

காவி **A** ஆக நிலைக்காந்தப் புலக்காவி **H** ஐ எடுப்போமாயின், **A** – கோடுகளுக்கும், **A** – குழாய்களுக்கும் ஒரு பழக்கப்பட்ட உதாரணம் இடைக்கும். **H** – கோடுகளை விசைக்கோடுகள் என்றும், **H** குழாய்களை விசைக் குழாய்கள் என்றும் கூறுவது வழக்கம். ஒரு காந்தச் சட்டத்தை எடுத்து, அதன் அண்மையில் இரும்புத் தூளைத் தூவுவோமாயின், காந்தத்தின் ஒரு முனையிலே தொடங்கி மறுமுனையிலே சென்று முடிவனவான விசைக்கோடுகளைத் தெளிவாகக் காணலாம். (படம் 3)

3.5. திசைப் பெறுதி

ஒரு சார்பு

$$\phi(P)=\phi(\mathbf{r})=\phi(x, y, z)$$

தரப்பட்டவிடத்து

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}$$

எனும் பகுதிப் பெறுதிகளை நாம் வரையறுக்கலாம்.

இங்கு, $$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\underset{\Delta x\to 0}{\text{எல்}}\ \frac{\phi(x+\Delta x, y, z)-\phi(x, y, z)}{\Delta x} \qquad (29)$$

இது y, z என்பன மாறாதிருக்க x பற்றி எடுக்கப்படும் பெறுதி; அதாவது $\frac{\partial\phi}{\partial x}$ என்பது x – அச்சுக்குச் சமாந்தரமான ஒரு கோட்டின் வழியேயான மாற்ற வீதமாகும். அதுபோல, $\frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z}$ என்பன முறையே y அச்சுககும் z அச்சுக்குஞ் சமாந்தரமான கோடுகளின் வழியே உள்ள மாற்ற வீதங்களாகும்.

திசைப் பெறுதியை ஓர் எதேச்சையான திசையின் நீளத்திற்கு

$$\underset{\Delta s\to 0}{\text{எல்}}\ \frac{\Delta\phi}{\Delta s} \qquad (30)$$

என நாம் வரையறுக்கலாம்; இங்கு, $\Delta\phi$ ஆனது குறிக்கப்பட்ட திசையில் ஒரு தூரம் Δs இறகு P எனனும் புள்ளி இயக்கப்பட்ட ϕ இல் ஆகும் மாற்றம்.

திசைக கோசைனகள் கோசை α, கோஸை β, கோசை γ ஆயுள்ள கோடு l இன் நீளத்திறகு P_0 (x_0, y_0, z_0) என்னும் புள்ளியில் ϕ இன் திசைப் பெறுதி

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_0 \text{கோசை } \alpha+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_0 \text{கோசை } \beta+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0 \text{கோசை } \gamma \qquad (31)$$

ஆகும் என்னும் முடிபை நாம் தாபிப்போம்.

கோடு l இல் P_0 இலிருந்து தூரம் s இலுள்ள ஒரு புள்ளியின் ஆள் கூறுகள்

$$x = x_0 + s \text{ கோசை } \alpha, \quad y = y_0 + s \text{ கோசை } \beta, \quad z = z_0 + s \text{ கோசை } \gamma \tag{32}$$

கோடு l இல் உள்ள புள்ளிகளில், ϕ ஆனது s இன் ஒரு சார்பு எனின், $\underset{\Delta s \to 0}{\text{எல்}} \dfrac{\Delta\phi}{\Delta s}$ என்பது s பற்றி எடுக்கப்படும் ϕ இன் வழக்கமான வகையீட்டுக் குணகம், அதாவது $(\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}s)_0$.

இவ்வாறு, l இன் நீளத்திற்கு P_0 இல் ϕ இன் திசைப் பெறுதி $(\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}s)_0$. பகுதிமுறை வகையீட்டின் நியம விதியால்,

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} \tag{33}$$

(32) இலிருந்து,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \text{கோசை } \alpha, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} = \text{கோசை } \beta, \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = \text{கோசை } \gamma \tag{34}$$

எனின் திசைப் பெறுதி

$$\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}\right)_0 = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_0 \text{ கோசை } \alpha + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_0 \text{ கோசை } \beta + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)_0 \text{ கோசை } \gamma \tag{35}$$

"ஒருவளையி வழியே உள்ள திசைப் பெறுதியும்" வரையறுக்கப்படலாம். இது தந்த ஒரு வளையி மீது ஒரு புள்ளியில் அவ்வளையிக்கு வரையப்படுந் தொடலியின் வழியே அப்புள்ளியிலுள்ள பெறுதியாகும். s ஆனது அவ்வளையி மீதுள்ள ஒரு நிலையான புள்ளியிலிருந்து அவ்வளையி மீதுள்ள ஒரு புள்ளி P யின் விற்றூரமாயின், அத்தொடலி வழியே அலகுக்காவி

$$\mathbf{T} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right).$$

P யின் ஆள்கூறுகள் s இன் சார்புகளாதலால், அவ்வளையி மீதுள்ள புள்ளிகளுக்கு $\phi(P)$ ஆனது s இன் ஒரு சார்பு. முன்னர் எடுத்துச் சிந்திக்கப்பட்ட நேர்கோடு l இற்குப்போல, அவ்வளையி வழியே P யில் ϕ இன் திசைப பெறுதி $\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}$; இது பகுதிமுறை வகையீட்டு விதிகளால்

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial\phi}{\partial x}T_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}T_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}T_z. \tag{36}$$

3.6. படித்திறன் காவி

ஓர் எண்ணிச் சார்பு ϕ இன் $\partial\phi/\partial x$, $\partial\phi/\partial y$, $\partial\phi/\partial z$ என்னும் பகுதிப் பெறுதிகளின் ஒரு பிரதான உடைமை அவை பல பிரதானமான பயன்களை யுடைய ஒரு காவியின் ஆள்கூற்றச்சுக்களின் நீளத்திற்கு எடுக்கப்படும் துணிசல்கள் என்பதாம்.

தன் கூறுகள் $\partial\phi/\partial x$, $\partial\phi/\partial y$, $\partial\phi/\partial z$ ஆயுள்ள திசைக்கணியம் ஒரு **காவிக்** கணியத்திற்குரிய தீர்மான நியமங்களைத் திருப்தியாக்கும் என்பதை நாம் வாய்ப்புப் பார்க்கலாம். பருமனும் திசையுமுடையதாயிருத்தலேயன்றி அக் கணியங் காவிக் கூட்டல் விதிக்கும் அமையவேண்டும். ϕ_1, ϕ_2 என்பன எண்ணிச் சார்புகளெனின்

$$\frac{\partial}{\partial x}(\phi_1+\phi_2)=\frac{\partial\phi_1}{\partial x}+\frac{\partial\phi_2}{\partial x};$$

y, z. என்பன பற்றியுள்ள பெறுதிகளுக்கு இதனோடு ஒத்த தொடர்புகள் உண்டு. இவ்வுடைமையிலிருந்து அத்தகைய கணியங்கள் காவிக் கூட்டல் விதிக்கு அமையுமென நாம் தாபிக்கலாம்.

கூறுகள் $\partial\phi/\partial x$, $\partial\phi/\partial y$, $\partial\phi/\partial z$ ஆயுள்ள காவியை **G** என்பதால் நாம் குறித்தால்,

$$G_x=\frac{\partial\phi}{\partial x},\qquad G_y=\frac{\partial\phi}{\partial y},\qquad G_z=\frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{37}$$

ஒரு வளையி (அல்லது நேர் கோட்டின) வழியே ஓர் எண்ணிச சார்பு ϕ இன் திசைப் பெறுதி பினவருமாறு காவி **G** பற்றி உணர்த்தப்படலாம். சமன்பாடு (36) இலிருநது, பெறுதி

$$\frac{d\phi}{ds}=\mathbf{G}.\ \mathbf{T} \tag{38}$$

இங்கு, **T** ஆனது எடுத்துச சிநதிக்கபபட்ட புள்ளியில் அவவளையியின் தொடலி வழியே உளள அலகுக் காவியாகும். (நேர் கோடாயின், **T** ஆனது அந்நேர்கோட்டின் வழியே உள்ள அலகுக் காவி.)

இனி, காவி **G** ஐப் பற்றிய ஒரு தேற்றத்தைக் கூறி நிறுவுவோம்.

யாதுமொரு புள்ளியிற் காவி G ஆனது அப்புள்ளிக்கூடாகச் செல்லும் $\phi=$ மாறிலி என்னும் மட்டப் பரப்பிற்குச் செங்குத்து.

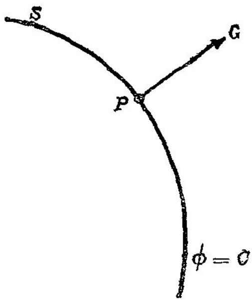
S ஆனது $\phi=C$ எனனுஞ சமன்பாடுடைய பரப்பாகுக ; அது புள்ளி P யிற கூடாகச செல்கின்றதெனக கொள்க (படம் 7).

P யிற கூடாகச் செல்லும ஒரு வளையியை எடுத்துச் சிந்திக்க ; அவ்வளையிககு P யிலுளள தொடலி, பரப்பு S இற்கு P யில் வரையப்படுந தொடலித் தளத்தின மீது இருக்குமாறு அவ்வளையி உள்ளதெனக் கொள்க.

அத்தகை வளையி வழியே P யில் திசைபபெறுதி $\dfrac{d\phi}{ds}$ ஆகும் ; இது மறையும் ; ஏனெனில அப்பரப்பின சமனபாடு $\phi=C$ ஆயிருததலால்.

T ஆனது P யில் அவ்வளையியின் தொடலி வழியே அலகுக் காவியைக் குறித்தால், சமன்பாடு (38) தருவது

$$\mathbf{G}.\mathbf{T}=0. \tag{39}$$



படம் 7

எனின், **G** ஆனது **T** இற்குச் செங்குத்து. இவ்வுடைமையானது P யிலுள்ள தொடலி பரப்பு S இறகு P யில் வரையபபடுந் தொடலித் தளத்தின் மீது கிடக்கும். ஒவ்வொரு வளையிக்கும உண்மையாகும்.

இக்காவி **G** ஆனது ϕ இன் படித்திறன் எனபபடும் ; இது படி ϕ என எழுதப்படும்.

$$\mathbf{G}=\text{படி}\ \phi=\left(\frac{\partial\phi}{\partial x},\ \frac{\partial\phi}{\partial y},\ \frac{\partial\phi}{\partial z}\right). \tag{40}$$

அனறியும்,

$$|\mathbf{G}|=\sqrt{\left\{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2\right\}}. \tag{41}$$

யாதுமொரு கோடு l இன் வழியே ϕ இன் திசைப் பெறுதி பின்ருவமாறு படித்திறன் காவிபறறி உணர்ததப்படலாம். (31) இலிருந்து, (கோசை α, கோசை β, கோசை γ) எனபன திசைக கோசைன்களாயுள்ள கோடு l இன வழியே பெறுதி

$$\frac{d\phi}{ds}=\mathbf{G}_x\ \text{கோசை}\ \alpha+\mathbf{G}_y\ \text{கோசை}\ \beta+\mathbf{G}_z\ \text{கோசை}\ \gamma$$
$$=\text{கூறு}_l\ \ \mathbf{G}. \tag{42}$$

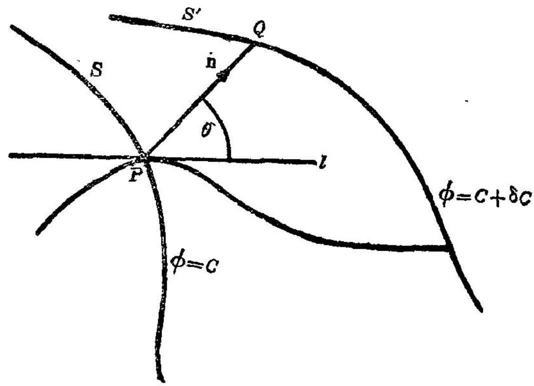
இதிலிருந்து பின்வருந் தேற்றத்தைப பெறுவோம் :

யாதுமொரு திசையில் படி ϕ இன் கூறு அத்திசையில் ϕ இன் திசைப் பெறுதிக்குச் சமன்.

தொடக்கத்தில், **G** எனபதைக் குறிககப்பட்ட ஆள்கூற்றச்சுத் தொகுதி ஒன்று பற்றி வரையறுத்தோமாயினும், அது அச்சுத தேர்வைச் சாராத

ஒரு கணியமெனக் காண்போம். எண்ணிப் புலம் ϕ தரப்படுமிடத்து, எடுத்துச் சிந்திக்கப்படும் பிரதேசத்தில் ஒவ்வொரு புள்ளியிலும் அறியப்படும் ஒரு காவிப்புலம் **G** ஐ நாம் பெறுவோம்.

பின்வரும் விளக்கக் காட்டு சாய்வு விகிதக் காவி **G** இன் பிரதானமான கேத்திர கணிதவுடைமையைக் காட்டும். $\phi = C$, $\phi = C + \delta C$ என்னுஞ் சமன்பாடுகளை முறையே உடைய S, S' என்னும் இரண்டு அயற் பரப்புக்களை எடுத்துச் சிந்திக்க. பரப்பு S இற்கு P யில் உள்ள செங்குத்து பரப்பு S' ஐ Q விற் சநதிக்கின்றதெனக் கொள்க (படம் 8). P யிற் கூடாகச் செல்வதாகத் தந்த ஒரு வளையிப் பரப்பு S' ஐ P' இற சந்திக்க. P யில் அவ்வளையிக்கு வரையப்படும் l என்னுந் தொடலி செங்குத்து PQ வோடு கோணம் θ வை ஆக்குக.



படம் 8

$$|\mathbf{G}| = \underset{\delta C \to 0}{\text{எல்}} \frac{\delta C}{PQ}. \tag{43}$$

காவி **G** ஆனது S இறகு P யிற் செஙகுததது ; அதன பருமன் P யிலுள்ள செங்குத்தின் திசையில தூரம பற்றி ϕ இன மாற்ற வீதமாகும். **n** ஆனது P யில் S இறகு வரையப்படுஞ் செங்குததைக் குறித்தால், அச் செஙகுததின் நீளத்திற்குக கணிக்கபபடும் பெறுதியை $\dfrac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}$ ஆற் குறித்தல் வசதியாகும். எனின், நாம் பெறுவது,

$$\mathbf{G} = \frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}, \quad |\mathbf{G}| = \frac{\partial \phi}{\partial n}. \tag{44}$$

வளையி PP' இன் வழியே திசைப் பெறுதி, $\delta C \to 0$ ஆக, $\delta C/PP'$ இன் எல்லையாகும்.

ஆனால்,
$$\frac{\delta C}{PP'}=\frac{\delta C}{PQ}\cdot\frac{PQ}{PP'}. \qquad (45)$$

எல்லைக்குச் செல்ல, நாம் பெறுவது
$$\frac{d\phi}{ds}= |\mathbf{G}| \text{ கோசை } \theta ;$$

அதாவது, l இன் வழியே திசைப் பெறுதி கூறு, **G**.

படித்திறன் காவியாகிய படி ϕ இன் திசை, ϕ மிக அதிகமாக அதிகரிக்கும் திசைவழியே இருக்கும்; அதன் பருமன், இந்த உயர்வு அதிகரிப்பின் பெறுமதியாகும்.

எடுத்துக்காட்டு 1. Q வின ஆள்கூறுகள் (5, 0, 4) ஆயிருக்குமிடத்து புள்ளி P (1, 2,3) இற் கோடு PQ வின் திசையில
$$\phi=x^2-y^2+2z^2$$
எனனுஞ் சார்பின் திசைப் பெறுதியின் பெறுமானத்தைக் கணிக்க.
$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=2x, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y}=-2y, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial z}=4z.$$
எனின, P யில், **G** இன் கூறுகள் (2, − 4, 12) ஆகும். PQ வின் திசைக் கோசைனகள் 5 − 1, 0 − 2, 4 − 3 அதாவது 4, −2, 1 என்பனவற்றுக்கு விகிதசமம். எனின், PQ வின் திசைக் கோசைனகள்
$$\frac{4}{\sqrt{(4^2+2^2+1^2)}}, \frac{-2}{\sqrt{(4^2+2^2+1^2)}}, \frac{1}{\sqrt{(4^2+2^2+1^2)}}$$
அதாவது,
$$\frac{4}{\sqrt{21}}, \frac{-2}{\sqrt{21}}, \frac{1}{\sqrt{21}}.$$
வேண்டிய திசைப் பெறுதி
$$\mathbf{G}_x \text{ கோசை } \alpha+\mathbf{G}_y \text{ கோசை } \beta+\mathbf{G}_z \text{ கோசை } \gamma$$
$$=2\left(\frac{4}{\sqrt{21}}\right)+(-4)\left(\frac{-2}{\sqrt{21}}\right)+12\left(\frac{1}{\sqrt{21}}\right)$$
$$=\tfrac{4}{3}\sqrt{21}.$$

எடுத்துக்காட்டு 2.

$r=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$ ஆயிருககுமிடத்து, படி $(1/r)$ இன் கூறுகளைக் காண்க. $\partial/\partial x(1/r)=-(1/r^2)\ \partial r/\partial x$. $r^2=x^2+y^2+z^2$ என்பதிலிருந்து x பற்றிப் பகுதி முறை வகையிட, நாம பெறுவது,
$$2r\frac{\partial r}{\partial x}=2x, \qquad \text{எனின் } \frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}.$$

பிரதியிட, நாம் பெறுவது

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{x}{r^3}.$$

$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)$, $\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)$ என்பனவற்றிற்கு மேலதனோடு ஒத்த கோவைகளைப் பெறுவோம்.

இவ்வாறு

$$\text{படி}\left(\frac{1}{r}\right) = \left[\frac{-x}{r^3}, \frac{-y}{r^3}, \frac{-z}{r^3}\right].$$

பயிற்சி III

1. $\mathbf{r}$ ஆனது t இன் ஒரு காவிச் சார்பென்றும், $\mathbf{a}$ யானது ஒரு மாருக காவியென்றுந் தரப்படின், பின்வருவனவற்றை t பற்றி வகையிடுக :

(i) $\mathbf{r}.\mathbf{a}$, (ii) $\mathbf{r}\times\mathbf{a}$. (iii) $\mathbf{r}.\dot{\mathbf{r}}$. (iv) $\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}$.

(v) $\dot{\mathbf{r}}.\mathbf{a}$, (vi) $[\mathbf{a}, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}]$. (vii) $[\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}]$.

2. $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ என்பன மாருக் காவிகளாயும், λ என்பது ஒரு மாறிலியாயும் இருக்கு மிடத்து, $\mathbf{r}$ ஆனது

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}\ \text{கோசை}\ \lambda t + \mathbf{B}\ \text{சைன}\ \lambda t,$$

என்பதாலே தரப்படும் t இன் ஒரு சார்பெனின்,

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} + \lambda^2\mathbf{r} = \mathbf{0}.$$

எனக் காட்டுக.

3

$$\mathbf{r} = a\ \text{கோசை}\ t\mathbf{i} + a\ \text{சைன்}\ t\mathbf{j} + ct\mathbf{k},$$

எனனும் வளையிககு அலகுக காவி $\mathbf{T}$ ஐக் காண்க.

4. ஒரு துணிக்கையானது $t=0$ என்னும் நேரத்தில் நிலைககாவி $\mathbf{r}_0$ ஒடு கூடிய ஒரு புள்ளியிலிருந்து புறப்பட்டு மாறு வேகம $\mathbf{v}$ ஒடு இயங்குகினறது. t எனனும் நேரத்தில் அப்புள்ளியின நிலைக்காவி $\mathbf{r}$ ஐத் தருக ; $t = -(\mathbf{r}_0.\mathbf{v})/(\mathbf{v}.\mathbf{v})$ எனனும் நேரததில், அததுணிககை ஒதத உறபததிககு மிக்க அணமையாய் இருககும் (அல்லது இருந்தது) எனக காட்டுக.

[Camb. N. S. 1954]

5. $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$ எனபன ஒனறுககொன்று செஙகுத்தான அலகுக காவிகள ; அவை ($\mathbf{l}\times\mathbf{m}$ பறறி வலஞ் சுழி முறையே நேராகக கொளளபபடும) ω எனனுங கோண வேகத்தோடு தம் பொதுச செஙகோட்டின் கணநிலைத் திசை பறறிச சுழலும். எனின்,

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \omega\mathbf{m}\ \text{எனறும},\quad \frac{d\mathbf{m}}{dt} = -\omega\mathbf{l}\ \text{எனறுங் காட்டுக.}$$

இவற்றைக் கொண்டு $\mathbf{l}$, $\mathbf{m}$ எனபனவற்றிற்கு வரையப்படும் பொதுச செவ்வனின் திசை நிலையாயிருககுமெனக காட்டுக.

[Camb. P. N. S. 1954]

6. $\mathbf{E}=(0, E, 0)$ ஆயும் $\mathbf{H}=(0, 0, H)$ ஆயும் $e, m, c, \mathbf{E}, \mathbf{H}$ என்பன மாறிலிகளாயும் இருக்குமிடத்து, காவி-$\mathbf{r}$ ஆனது

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=e\mathbf{E}+\frac{e}{c}\frac{d\mathbf{r}}{dt}\times\mathbf{H},$$

எனனுங் காவிச் சமன்பாட்டைத் திருப்தியாக்கும்.

அசசமனபாட்டைக கூறுகிய வடிவததில் எழுதுக ; அச்சமனபாட்டைத் தீர்த்தலால்

$$x=\frac{cEt}{H}-\frac{mc^2E}{eH^2}\text{ சைன் }\left(\frac{eHt}{mc}\right),$$

$$y=\frac{mc^2E}{eH^2}\left\{1-\text{கோசை}\left(\frac{eHt}{mc}\right)\right\},$$

$$z=0.$$

என்பதே $t=0$ இல்,

$\mathbf{r}=\mathbf{0},\ \frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{0}$ என்னும் நிபந்தனைகளைத திருபதியாககுந் தீர்வெனக் காட்டுக.

[Camb. P. N. S. 1947]

7. $O=(0, 0, 0)$, $A=(-a, 0, 0)$, $B=(a, 0, 0)$, $P=(x, y, z)$ ஆயிருக்குமிடததது, பின்வரும் வகைகளில் $\phi=$ மாறிலி என்னும் சமவழுததப் பரப்புக்களை வரைக :

(i) $\phi=\frac{1}{OP}$, (ii) $\phi=\frac{1}{AP}-\frac{1}{BP}$, (iii) $\phi=\frac{1}{AP}+\frac{1}{BP}-\frac{2}{OP}$,

(iv) $\phi=\text{மட}\left|\frac{AP+BP+2a}{AP+BP-2a}\right|$.

8. $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ எனபன P யிறகு A_1, A_2 என்னும் புள்ளிகளிலிருந்து வரையப்படுங் காவிகளெனின், $r_1=|\mathbf{r}_1|$, $r_2=|\mathbf{r}_2|$ ஆகுமிடத்து $r_1+r_2=$ மாறிலி என்னும் நிபந்தனை ஒரு நீளவளையததை நிருணயிக்குமெனக காட்டுக.

$\mathbf{u}$ ஆனது $\mathbf{r}_1$ இன் நீளத்திறகு அலகுக் காவியாயிருக்குமிடத்து,

$$\mathbf{T}=\frac{d\mathbf{r}_1}{ds}=\frac{dr_1}{ds}\mathbf{u}+r_1\frac{d\mathbf{u}}{ds}.$$

எனனும் நீள்வளையத்திற்கு அதனைக் காட்டுக. இதனைக் கொண்டு

$$\mathbf{T}.\mathbf{u}=\frac{dr_1}{ds}.$$

எனக் காட்டுக.

அந்நீள்வளையத்திற்கு P யில் வரையப்படுந் தொடலி A_1P, A_2P என்னும் ஆரைகளோடு சமகோணஙகளை ஆக்குமென்றுங் காட்டுக.

9. $A=-(c, 0)$, $B=(c, 0)$, $\phi=\text{மட}\ (AP/BP)$

$G=$ படி ϕ ஆயின், $dx/Gx=dy/Gy$ என்பதாலே தரப்படும் புலக் கோடுகளைக் கண்டு, அவை $\phi=$ மாறிலி என்னும் பரப்புகளை நிமிர்கோணமாக வெட்டுகின்றன என்று காட்டுக.

10. B யின ஆளகூறுகள (2, 6, −1) ஆக, புள்ளி A (1, −2, 1) இல், AB என்னுந் திசையில்

$$\phi = x^4 + y^4 + z^4,$$

எனபதன் திசைப் பெறுதியைக காணக.

11. $x^2 + y^2 + z^2 = 36$, $x^2 - y^2 + z^2 = 16$ என்னும பரபபுக்கள் தரப்பட்டால், அப்பரப்புக்கள் ஒனறையொனறு வெடடும வளையியின் திசையில, (4, $\sqrt{10}$, $\sqrt{10}$), என்ற புள்ளியில்

$$\phi = x^2 - 3y^2 + z^2$$

எனபதன் திசைப பெறுதியைக காணக.

12. (3, 1, 2) என்னும புள்ளியில் $yz\mathbf{i} + zx\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ என்னுங் காவியின திசையில்

$$\phi = (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}$$

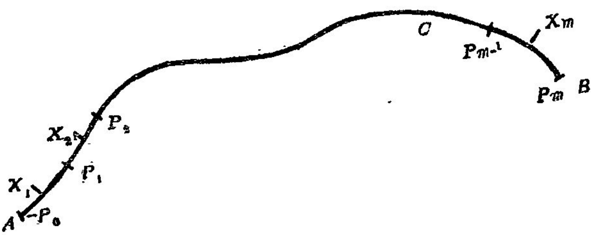
எனபதன கூடுதல வீததததைக காணக.

அதிகாரம் 4

காவி நுண்கணிதம்

4.1. கோட்டுத் தொகையீடுகள்

C யானது A, B என்பனவற்றை முனைப் புள்ளிகளாகக் கொண்ட ஒரு வளையியின் ஒரு வில்லெனக் கொள்க.



படம் 1

$\phi(P)$ என்பது ஓர் எண்ணிப் புள்ளிச் சாராபாகுக. வளையி C யின் மீது ϕ இன் தொகையீடு பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படலாம. அவ்வளையி $P_0, P_1, \ldots, P_m$ என்னும $m+1$ புள்ளிகளால் m பகுதிகளாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது ; இங்கு, $A \equiv P_0$, $B \equiv P_m$.

$q = 1, 2, \ldots, m$ ஆகுமிடத்து Δs_q ஆனது $P_{q-1} P_q$ என்னும் வில்லின் நீளமாகுக ; X_q என்பது அவ்வளையியியின்மீது $P_{q-1} P_q$ என்னும் வில்லுக்குள் உள்ள புள்ளியாகுக.

$$\phi(X_q)\, \Delta s_q \tag{1}$$

என்னுங் கோவை Δs_q என்னும் ஒவ்வோர் ஆயிடைக்கும் ஆக்கப்படும் ; q ஆனது $1, 2, \ldots, m$ என்னும் பெறுமானங்களைக் கொள்ளவரும் பல்வேறு கோவைகளைக் கூட்ட வருவது

$$\phi(X_1)\, \Delta s_1 + \phi(X_2)\, \Delta s_2 + \ldots + \phi(X_m)\, \Delta s_m. \tag{2}$$

$m \to \infty$ ஆகவும் ஒவ்வொரு $\Delta s_q \to 0$ ஆகவும் (2) என்னுங் கோவை C யை அதன் மூலகங்கள் Δs_q ஆகப் பிரிக்கும் விதத்தைச் சாராத ஒரு முடிவுள்ள எல்லையை அணுகின், இவ்வெல்லையின் பெறுமானம் C யின் மீது ϕ இன் தொகையீடெனப்படும் : அது

$$\int_C \phi \, ds \tag{3}$$

என எழுதப்படும்.

ஒரு வளையி C யின் மீது அத்தகைத் தொகையீடு **கோட்டுத் தொகையீடு** என்றுதல் **வளைகோட்டுத் தொகையீடு** என்றுதல் கூறப்படும்; வளையி C யானது **தொகையிடல் வழி** எனப்படும்.

இது ஒரு தனி மாறியின ஒரு சார்பின்

$$\int_a^b f(x)\,dx \tag{4}$$

என்னும் றைமான் தொகையீட்டின் ஓர் எளிய பொதுவுரை என்று காணப்படும்; இங்கு, $f(x)$ ஆனது x எனனும மாறியின் ஒரு சார்பு; தொகையிடலின எல்லைகள் a, b என்பன; அதாவது, தொகையிடலின் வழி x–அச்சின் நீளத்திற்கு $x=a$ என்னும் புள்ளியிலிருந்து $x=b$ என்னும் புளளி வரைக்கும் இருக்கும்.

கோவை (2) இலுளள கூட்டுத்தொகையின எலலை உண்டு எனபது தொகையீடு (4) இறகுப பயனபடுததிய முறைகளாற் பிரயோக கணிதத்தில் நாம் வழக்கமாக வழஙகும் சார்புகள் பற்றிக் காட்டப்படலாம்; அது இந்நூலில் இனிவரும் பகுதியில் எடுத்துக் கொளளபபடும்.

நாம கையாளுகு சார்புகள் ஒற்றைப் பெறுமானமுடையவை எனறும் தொடாச்சியானவை எனறும் வகையிடத்தக்கவை என்றும் எடுத்துக் கொள்ளபபடும். செயன்முறையில், தொகையீட்டின் பெறுமானக கணிப்பு எல்லையுறும் முறையின் நேருபயோகத்திற்கூடாக இராது. கோட்டுத் தொகையீடு (4) ஆனது வரையறுத தொகையீட்டோடு அதன் தொடர்பைப் பயன்படுததுதலாலே துணியப்படும்.

கோட்டுத் தொகையீடுகளில், தொகையீட்டுச் சார்புகள் எண்களாகவோ காவிகளாகவோ இருக்கலாம். இவ்வாறு

$$\int \mathbf{A}\,ds \tag{5}$$

என்னும் வகையான தொகையீடுகள் உணடு. இவை டெக்காட்டுக கூறுகள் பற்றி

$$\mathbf{i}\int A_x ds+\mathbf{j}\int A_y ds+\mathbf{k}\int A_z ds \tag{6}$$

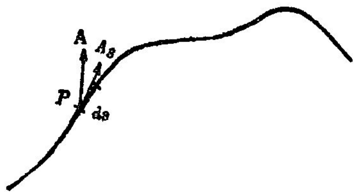
என்று எழுதப்படலாம்.

s ஆனது அவ்வளையியிலுள்ள ஒரு நிலையான புள்ளி P யிலிருந்து அவ்வளையியிலுள்ள ஒரு மாறும் புள்ளி P_0 இன் P_0P எனனும வில் நீளத் தூரத்தைக் குறிததால, ds எனனுங் குறியீடு நுண்ணளவு எண்ணி மூலகமாகிய ds என்னும் பருமனையும் அவ்வளையிக்கு P யிலுளள தொடலி வழியே உளள திசையையும உடைய காவியைக குறித்தற்கு வழங்கப்படலாம்; அதாவது

$$d\mathbf{s}=\mathbf{T}ds=\mathbf{i}dx+\mathbf{j}dy+\mathbf{k}dz; \tag{7}$$

இங்கு
$$\mathbf{T}=\frac{d\mathbf{r}}{ds} \tag{8}$$
என்பது P யிலுள்ள தொடலி வழியே எடுக்கப்படும் அலகுக் காவி.

ஒரு வளையி C யின் மீது ஒருகாவி A யின் எண்ணிக் கோட்டுத்தொகையீடு
$$\int_C \mathbf{A}.d\mathbf{s} \tag{9}$$
என வரையறுக்கப்படும். நாம் காண்பது
$$\int_C \mathbf{A}.d\mathbf{s}=\int_C A_s\, ds \tag{10}$$
இங்கு, A_s ஆனது அவ்வளையிக்கு P யிலுள்ள தொடலியின் திசையில் $\mathbf{A}$ யின கூறுகும் (படம் 2).



படம் 2

டெக்காட்டுக் கூறுகள்பற்றி (9) ஆனது
$$\int_C (A_x\mathbf{i}+A_y\mathbf{j}+A_z\mathbf{k}).(\mathbf{i}dx+\mathbf{j}dy+\mathbf{k}dz)$$
$$=\int_C (A_x dx+A_y dy+A_z dz) \tag{11}$$
என எழுதப்படலாம்.

காவிக் கோட்டுத் தொகையீடு இவ்வாறு வரையறுக்கப்படலாம் ; ஆதாவது
$$\int_C \mathbf{A}\times d\mathbf{s}. \tag{12}$$
இது டெக்காட்டுக் கூறுகள்பற்றி
$$\mathbf{i}\int_C (A_y dz-A_z dy)+\mathbf{j}\int_C (A_z dx-A_x dz)+\mathbf{k}\int_C (A_x dy-A_y dx) \tag{13}$$
என எழுதப்படலாம்.

எடுத்துக்காட்டு 1. $\int_C (x+y+z)\, ds$ எனபதன் பெறுமானத்தைக் கணிக்க. இங்கு, தொகையிடல் வழி C யானது

(a) A (0, 0, 0) என்பதை B (6, 8, 10) என்பதனோடு தொடுக்கும் நேர்கோடு,

(b) xy – தளத்தில் முதலாங் காலில் $x^2+y^2=a^2$, $z=0$ என்னும் வட்டத்தின் வில்.

(a) நேர்கோடு AB யின் சமன்பாடு.

$$\frac{x}{3}=\frac{y}{4}=\frac{z}{5}.$$

அக்கோட்டிலுள்ள யாதுமொரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகள் ஒரு பரமாணம் t பற்றி

$$x=3t, \qquad y=4t, \qquad z=5t,$$

என்னுஞ் சமன்பாடுகளால் உணர்த்தபபடலாம் ;

இங்கு, t ஆனது $t=0$ இலிருந்து $t=2$ வரைக்குமுள்ள பெறுமானங் களை எடுக்கும். dx, dy, dz என்னும வகையீடுகள் dt பற்றி

$$dx=3dt, \qquad dy=4dt, \qquad dz=5dt.$$

என்பனவற்றுல் உணர்த்தப்படும்.

எனின்,

$$\mathbf{ds}=\mathbf{i}dx+\mathbf{i}dy+\mathbf{k}dz,$$

$$=(3\mathbf{i}+4\mathbf{j}+5\mathbf{k})\ dt,$$

ஆகவே, $$ds=|\mathbf{ds}|=\sqrt{(3^2+4^2+5^2)}\ dt=5\sqrt{2}\ dt,$$

$$\int_C \phi\ ds=\int_C (x+y+z)\ ds=\int_0^2 (3t+4t+5t)5\sqrt{2}\ dt$$

$$=60\sqrt{2}\int_0^2 t dt=120\sqrt{2}.$$

(b) முதலாங் காலியில $x^2+y^2=a^2$, $z=0$ எனனும் வட்டத்தின் வில்லி லுள்ள யாதுமொரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகள்

$$x=a \text{ கோசை } \theta, \qquad y=a \text{ சைன் } \theta, \qquad z=0$$

ஆயுள்ள ஒரு பரமாணம் θ பற்றி உணர்த்தப்படலாம் ;

இஙகு, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$.

$$\mathbf{ds}=\mathbf{i}dx+\mathbf{j}dy+\mathbf{k}dz$$

$$=\mathbf{i}\ (-a \text{ சைன்}\theta\ d\theta)+\mathbf{j}\ (a \text{ கோசை } \theta\ d\theta)$$

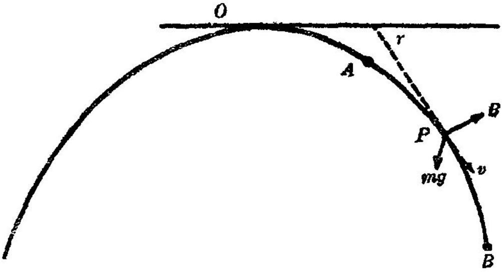
$$ds^2=(-a \text{ சைன் } \theta\ d\theta)^2+(a \text{ கோசை } \theta\ d\theta)^2=(a\ d\theta)^2$$

எனின், $ds=a\ d\theta$.

$$\int_C \phi\ ds=\int_C (x+y+z)\ ds=\int_0^{\pi/2} (a \text{ கோசை } \theta+a \text{ சைன் } \theta)\ a\ d\theta,$$

$$=a^2\Big[\text{சைன் } \theta-\text{கோசை } \theta\Big]_0^{\pi/2}=2a^2.$$

எடுத்துக்காட்டு 2. $s = 4a$ சைன் $\psi, \left(0 \leqslant \psi \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ என்னும் சக்கரப் போலி வடிவிலுள்ள ஓர் ஒப்பரவான கம்பி தன்னச்சு நிலைக்குத்தாகவும் உச்சி O ஆனது மிக உயர்ந்த புள்ளியில் இருக்கும்படியும் நிலையாக்கப் பட்டுள்ளது. புவியீர்ப்புக் காரணமாக அக்கம்பியின் வழியே அரக்கும் சுயாதீனமுள்ள திணிவு m கொண்ட ஒரு மணி $\psi = \frac{\pi}{6}$ ஆயுள்ள A என்னும் புள்ளியில் ஓய்விலிருந்து விடப்படுகின்றது. $\psi = \frac{\pi}{2}$ ஆயுள்ள மிகத் தாழ்ந்த புள்ளி B யை அடைய அம் மணி எடுக்கும் நேரத்தைக் காண்க.



படம் 3

v ஆனது $OP = s$ ஆயுள்ள அச்சக்கரப்போலியின் P என்னும் புள்ளியிலுள்ள கதி ஆகுக. எனின், $\frac{ds}{dt} = v$;

ஆயின்,
$$dt = \frac{1}{v}\,ds,$$

வேண்டிய நேரம்
$$T = \int_C \frac{ds}{v}.$$

இது ஒரு கோட்டுத் தொகையீடு ; இங்கு C என்னுந் தொகையிடல் வழி A யிலிருந்து B வரைக்குமுள்ள அச்சக்கரப்போலிப் பகுதி. அத் தொகையீட்டின் பெறுமானத்தைக் கணித்தற்கு v ஐ s இன் ஒரு சார்பாக நாம் அறிதல் வேண்டும். இது இயக்கச் சமன்பாட்டிலிருந்து பெறப்படலாம். நியூற்றன் இயக்க விதிகளைப் பயன்படுத்தி அவ்வளையிக்கு

P யிலுள்ள தொடலி வழியே துணித்து, மறு தாககத்திற்குத் தொடலிக் கூறு இல்லையென, அவதானித்து நாம் பெறுவது,

$$m\frac{dv}{dt}=mg \text{ சைன } \psi.$$

இது
$$\frac{v\,dv}{ds}=g \text{ சைன } \psi,$$

அல்லது
$$v\ dv=g \text{ சைன் } \psi ds$$

என எழுதப்படலாம்.

தொகையிட,
$$[\tfrac{1}{2}v^2]_A^P=\int_A^P g \text{ சைன் } \psi ds.$$

வலக்கைப் பக்கம் ஒரு கோட்டுத் தொகையீடாகும்; தொகையிடல் வழி அச்சக்கரப்போலியின் AP என்னும் பகுதி.

சைன் $\psi=s/4a$ என்று பிடதியிட, நாம் பெறுவது

$$\tfrac{1}{2}v^2=\int_{2a}^{s}\frac{g}{4a}\,s ds=\frac{g}{8a}(s^2-4a^2)$$

இவ்வாறு,
$$v=\sqrt{\left[\frac{g}{4a}\left(s^2-4a^2\right)\right]}.$$

எனின்,
$$T=\sqrt{\left(\frac{4a}{g}\right)}\int_{2a}^{4a}\frac{ds}{\sqrt{(s^2-4a^2)}}$$

$$=\sqrt{\left(\frac{4a}{g}\right)}\left[\text{அகோசை}^{-1}\frac{s}{2a}\right]_{2a}^{4a}=\sqrt{\left(\frac{4a}{g}\right)}(\text{அகோசை}^{-1}2-\text{அகோசை}^{-1}1)$$

$$=\sqrt{\left(\frac{4a}{g}\right)} \text{ மட } (2+\sqrt{3}).$$

எடுத்துக்காட்டு 3. $\mathbf{A}=y\mathbf{i}-z\mathbf{j}+x\mathbf{k}$ எனின்,

$$(a)\int_C \mathbf{A}ds,\quad (b)\int_C \mathbf{A}.d\mathbf{s},\quad (c)\int_C \mathbf{A}\times d\mathbf{s}.$$

என்பனவற்றைக் காண்க; இங்கு, C என்பது

$$\mathbf{r}=a \text{ கோசை } u\mathbf{i}+a \text{ சைன } u\mathbf{j}+au \text{ கோதா } \alpha\,\mathbf{k}$$

என்னுந் தொடர்பினூற் பரமான வடிவிலே தரப்பட்ட சமன்பாட்டையுடைய வளையி; இங்கு, a, α எனபன மாறிலிகள்; பரமானம் u ஆனது 0 இலிருந்து 2π வரைக்குமுள்ள பெறுமானங்களை எடுக்கும்.

$$d\mathbf{s}=d\mathbf{r}=(-a \text{ சைன் } u\mathbf{i}+a \text{ கோசை } u\mathbf{j}+a \text{ கோதா } \alpha\mathbf{k})\,du,$$

$$ds^2=(a^2 \text{ சைன்}^2 u+a^2 \text{ கோசை}^2 u+a^2 \text{ கோதா}^2 \alpha)\,du^2$$

$$=a^2 \text{ கோசீ}^2 \alpha\, du^2\ ;$$

இது தருவது
$$ds=a \text{ கோசீ } \alpha\, du.$$

$$(a) \int_C \mathbf{A} d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} (a \text{ சைன் } u\mathbf{i} - au \text{ கோதா } \alpha\mathbf{j} + a \text{ கோசை } u\mathbf{k})\, a \text{ கோசீ } \alpha\, du$$

$$= a^2 \text{ கோசீ } \alpha \left[-\text{கோசை } u\mathbf{i} - \tfrac{1}{2}u^2 \text{ கோதா } \alpha\mathbf{j} + \text{சைன் } u\mathbf{k} \right]_0^{2\pi}$$

$$= -2\pi^2 a^2 \text{ கோசீ } \alpha \text{ கோதா } \alpha\mathbf{j}.$$

$$(b) \int_C \mathbf{A}.d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} [-a^2 \text{ சைன்}^2 u - a^2 u \text{ கோதா } \alpha \text{ கோசை } u$$

$$+ a^2 \text{ கோசை } u \text{ கோதா } \alpha]\, du$$

$$= a^2 [-\tfrac{1}{2}(u - \tfrac{1}{2} \text{ சைன் } 2u) - \text{கோதா } \alpha\,(u \text{ சைன் } u + \text{ கோசை } u)$$

$$+ \text{ கோதா } \alpha \text{ சைன் } u]_0^{2\pi},$$

$$= -\pi a^2.$$

$$(c) \int_C \mathbf{A} \times d\mathbf{s} = a^2 \int_0^{2\pi} (\text{சைன் } u\mathbf{i} - u \text{ கோதா } \alpha\mathbf{j} + \text{ கோசை } u\mathbf{k})$$

$$\times (-\text{சைன் } u\mathbf{i} + \text{ கோசை } u\mathbf{j} + \text{ கோதா } \alpha\mathbf{k})\, du$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} [(-u \text{ கோதா}^2 \alpha - \text{கோசை}^2 u)\,\mathbf{i}$$

$$+ (-\text{சைன் } u \text{ கோசை } u - \text{சைன் } u \text{ கோதா } \alpha)\,\mathbf{j}$$

$$+ (\text{சைன் } u \text{ கோசை } u - u \text{ சைன் } u \text{ கோதா } \alpha)\mathbf{k}]\, du,$$

$$= a^2 [-\pi\,(1 + 2\pi \text{ கோதா}^2 \alpha)\,\mathbf{i} + 2\pi \text{ கோதா } \alpha\mathbf{k}].$$

4.2. படி ϕ இன் கோட்டுத் தொகையீடு

ஒரு வழி C யின் மீது ஒரு காவிப்புலம் $\mathbf{A}$ யின் கோட்டுத் தொகையீடு, அதாவது $\int_C \mathbf{A}.d\mathbf{s}$ ஆனது பொதுவாக C இன் இரண்டு முனைப் புள்ளிகளையும், அவ்விரு முனைப் புள்ளிகளையுந் தொடுக்குஞ் சிறப்பு வழியையுஞ் சார்ந்திருக்கும். எனினும், $\mathbf{A}$ யானது ஓர் எண்ணிச் சார்பு ϕ இன் படித்திறனாக உணர்த்தப்பட, அதாவது

$$\mathbf{A} = \mathbf{G} = \text{படி } \phi$$

ஆகும் பொழுது, $\int \mathbf{G}.d\mathbf{s}$ ஆனது அவ்விரு முனைப் புள்ளிகளை மாத்திரஞ் சார்ந்திருக்கும்; அது அப்புள்ளிகளைத் தொடுக்கும் வழியைச் சாராதிருக்கும். இது

$$\mathbf{G}.d\mathbf{s} = G_s ds = \frac{d\phi}{ds} ds = d\phi \tag{14}$$

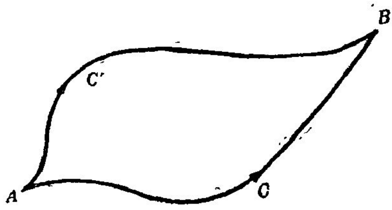
என்பதை அவதானிப்பதாற் காணப்படலாம்; இது

$\mathbf{G}.\mathrm{d}\mathbf{s}=G_x\mathrm{d}x+G_y\mathrm{d}y+G_z\mathrm{d}z$ ஆனது ஒரு நிறை வகையீடு என்பதைக் காட்டும். எனின்,

$$\int_C \mathbf{G}.\mathrm{d}\mathbf{s}=\int_C \mathrm{d}\phi=\Big[\phi\Big]_A^B=\phi(B)-\phi(A). \tag{15}$$

இவ்வாறு, அத்தொகையீடு அவ்விரு முனைப் புள்ளிகளிலுமுள்ள ϕ இன பெறுமானங்களை மாத்திரமேயன்றிச் சிறப்பு வழியைச் சார்ந்திராதென் பதை நாம் காண்போம்.

இம்முடிபு பின்வரும வடிவத்திலும் உணர்த்தப்படலாம் :



படம் 4

$$\int_C \mathbf{G}.\mathrm{d}\mathbf{s}=\int_{-C'} \mathbf{G}.\mathrm{d}\mathbf{s}. \tag{16}$$

இங்கு, C, C' என்னும இரண்டு A யில் தொடங்கி B யில் முடிவடை யும் வழிகள் (படம் 4). எனின்,

$$\int_C \mathbf{G}.\mathrm{d}\mathbf{s}+\int_{-C'} \mathbf{G}.\mathrm{d}\mathbf{s}=0$$

இங்கு, $-C'$ ஆனது B யிலிருந்து A யிற்குள்ள போக்கில் எடுக்கப்படும் C' என்பதே தொகையிடல வழி எனக் காட்டும்.

ஆகவே,

$$\oint_{C-C'} \mathbf{G}.\mathrm{d}\mathbf{s}=0.$$

இங்கு, $\oint$ ஆனது தொகையிடல் $C-C'$ எனனும் மூடிய வளையியின் மேலது என்பதைக் காட்டும். இம்முடிபு C, C' என்னும் எல்லா வளையி களுக்கும் உண்மையாதலால்,

$$\oint \mathbf{G}.\mathrm{d}\mathbf{s}=0 \tag{17}$$

என்பதை எடுத்து நோக்கிய வெளிப்பிரதேசத்திலுள்ள ஒவ்வொரு மூடிய வளையிக்கும் உய்த்தறியலாம்.

இதன் மறுதலைத் தேற்றமும் உண்மையாகும்; அதாவது, ஒரு காவி **A** யானது எடுத்து நோக்கப்பட்ட பிரதேசத்திலுள்ள ஒவ்வொரு மூடிய வளையியையுஞ் சுற்றி எடுக்கப்படுந் தொகையீடு பூச்சியமானால் **A** = படி ϕ ஆகுமாறு ϕ எனனும் ஒரு புள்ளிச் சார்பு உண்டு.

P_0 ஆனது அப்பிரதேசத்திலுள்ள ஒரு நிலையான புள்ளியாகுக; P யானது ஒரு மாறும் புள்ளியாகுக.

$$\phi(P) = \int_{P_0}^{P} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \tag{18}$$

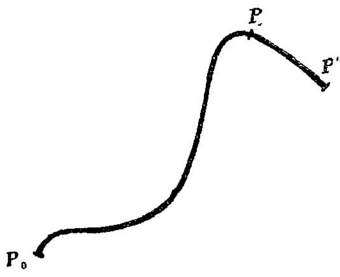
என்பதை எடுதது நோக்குக. இது P_0, P என்பனவற்றைத் தொடுக்கும் வழியைச் சாராதிருக்கும். ஆகவே, (x, y, z) என்பன P யின் ஆள்கூறுகளெனின,

$$\phi = \phi(x, y, z).$$

இது அப்பிரதேசத்தில் ஓர் ஒன்றிப பெறுமான நிலை சார்பாகும்.

P' எனபது P யின் அயலிலுள்ள ஒரு புள்ளியாகுக. $PP' = s$ ஆகுக. வழி P_0P' இறகு (18) ஐப் பயனபடுத்த,

$$\phi(P') = \int_{P_0}^{P'} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \tag{19}$$



படம் 5

P யிற் கூடாகச் செல்லும் வழி P_0P' ஓடு தொகையீடு (19) எடுத்து நோக்கப்படின,

$$\phi(P') - \phi(P) = \int_{P}^{P'} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \tag{20}$$

எனபது பெறப்படும். P, P' எனபன அயற் புள்ளிகளாயிருததலால, வலக் கைப்பக்கம் அண்ணளவாக $\mathbf{A}_s \delta s$, இஙகு A_s ஆனது PP' என்னுந் திசையில் **A** யினகூறு. எனின,

$$\phi(P') - \phi(P) = A_s \delta s.$$

இதிலிருந்து நாம் உய்த்தறிவது,

$$A_s = \frac{\partial \phi}{\partial s} . \qquad (21)$$

இது P இலிருந்து எலலாச் சிற்றிடப் பெயர்ச்சிகளுக்கும் உண்மையாகும், எனின், $\mathbf{A}$ = படி ϕ .

மேலே விவரிக்கப்பட்ட உடைமைகளோடு கூடிய ஒரு காவி **A** யானது **அழுத்தக் காவி** எனப்படும். A_x, A_y, A_z என்னுந் டெக்காட்டுக்கூறுகள் பற்றி, $A_x dx + A_y dy + A_z dz$ ஆனது ஒரு நிறை வகையீடாதற்கு நிபந்தனை,

$$\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} = 0 \qquad (22)$$

எனக காட்டலாம.

ஓா அழுத்தக் காவியின் தேவைகளைத திருபதியாக்கும் ஒரு காவிப் புலத்தின் எடுத்துக்காட்டாக, ஒரு காப்பு விசையாற் செய்யப்படும் வேலையை எடுத்து நோக்குக. X, Y, Z என்பன ஒரு துணிக்கை மீது தாக்கும் விசை **F** இன் கூறுகளெனின், அத்துணிக்கை A யிலிருந்து B யிற்கு இடப் பெயர்ச்சியடைதற்கண் அவ்விசையாற் செய்யப்படும் வேலை

$$W = \int_C (X dx + Y dy + Z dz) \qquad (23)$$

இங்கு, C யானது அததுணிக்கை A யிலிருந்து B யிற்குச் செல்லும் வழி.

அத்தொகுதி காப்புடையதெனின், செய்யப்பட்ட வேலை வேறு வேறு வழிகளுக்கு வேறுவேறுதல் கூடாது, அதற்குக் காரணம், இவை வேறுவேறுயின், A யிலிருந்து B யிற்கு ஒரு வழியாற் சென்று B யிலிருந்து A யிற்கு வேறொரு வழியாலே திரும்பிவருதலாற் சக்தி நயம் இருத்தல் கூடும் என்பதே. அவ்விசைகளின் காப்பியல்பின்படி A யிலிருந்து B யிற்குச் செல்லும் இடப்பெயர்ச்சியில் (23) இனலே தரப்பட்டவாறு செய்யப்படும் வேலையானது வழியையன்றி A, B என்னும் முனைபுள்ளிகளை மாத்திரஞ் சார்ந்து நிறகும். $X dx + Y dy + Z dz$ என்பது ஒரு நிறை வகையீடாகுமாறு X, Y, Z என்பன இருத்தல் வேண்டுமென்பது இதிலிருந்து பெறப்படும்., அவ்வகையீடு $-dV$ என எழுதப்படும் ; இங்கு V ஆனது அத்துணிக்கையின் அழுத்தச் சக்தியென வரையறுக்கப்படும். இவ்வாறு

$$W = \int_A^B - dV = V(A) - V(B) \qquad (24)$$

அதாவது, செய்யப்பட்ட வேலை அழுத்தச் சக்தி நட்டத்திற்குச் சமம்.

P_0 ஆனது பூச்சியவழுத்தச் சக்திக்கு ஒத்த நியம நிலையாக எடுக்கப் பட்ட ஒரு நிலையான புள்ளியாயும், P யானது x, y, z என்பனவற்றை ஆள்கூறுகளாகவுள்ள ஒரு மாறும் புள்ளியாயும் இருந்தால்,

$$V(x, y, z) = -\int_{P_0}^{P} (X\mathrm{d}x + Y\mathrm{d}y + Z\mathrm{d}z) \tag{25}$$

அதனோடு,

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad Z = -\frac{\partial V}{\partial z} \tag{26}$$

அ – து. $\mathbf{F} = -$படி V

P_0 ஆனது முடிவிலியில் இருப்பதாக எடுக்கப்படுதல் பெருவழக்கு.

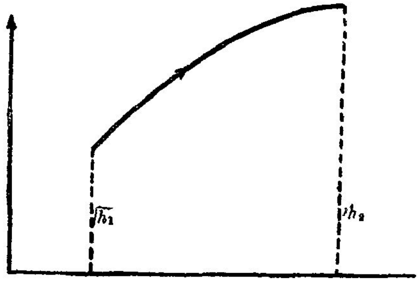
எடுத்துக்காட்டு 1. புவியின் பரப்பிற்கு அண்மையில் திணிவு m உடைய ஒரு துணிக்கையின் மீதுள்ள ஈர்ப்புவிசை அண்ணளவாக

$$-mg\mathbf{k}$$

என்னுங் காவியாற் குறிக்கப்படும் ; இங்கு, z – அச்சு நிலைக்குத்தாய் மேன முகமாக உள்ளது ; g என்பது ஒரு மாறிலி. யாதுமொரு வழியின் நீளத் திற்கு h_1 என்னும் உயரத்திலிருந்து h_2 என்னும் உயரத்திற்கு அத் துணிக்கை பெயர்க்கப்படுமிடத்து அவ்விசையினுற் செய்யப்படும் வேலை

$$mg(h_1 - h_2)$$

எனக் காட்டுக.



படம் 6

சமன்பாடு (23) தருவது

$$W = \int (X\,\mathrm{d}x + Y\,\mathrm{d}y + Z\,\mathrm{d}z) = \int_{h_1}^{h_2} -mg\,\mathrm{d}z = -mg\,[z]_{h_1}^{h_2}$$

$$= mg\,(h_1 - h_2).$$

எடுத்துக்காட்டு 2. பின்வரும் வகைகளில் **A** யானது ஓர் அழுத்தக் காவியோ எனப் பரிசோதிக்க :

$$(a)\ \mathbf{A}=\mathbf{r}f(r),\quad (b)\ \mathbf{A}=\mathbf{c}f(r);$$

இங்கு, **r** ஆனது நிலைக்காவி ; $r=|\mathbf{r}|$; **c** ஆனது ஒரு மாறாக் காவி. $A_x\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y+A_z\mathrm{d}z$ என்பதை எடுத்து நோக்குக. வகை (a) இல்,

$$A_x\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y+A_z\mathrm{d}z=f(r)\ (x\ \mathrm{d}x+y\ \mathrm{d}y+z\ \mathrm{d}z)$$
$$=f(r)\ r\mathrm{d}r=\mathrm{d}\phi;$$

இங்கு, $\phi=\int r\,f(r)\,\mathrm{d}r$. எனின், **A** யானது ஓர் அழுத்தக் காவி.

வகை (b) இல்,

$$A_x\mathrm{d}x+A_y\mathrm{d}y+A_z\mathrm{d}z=f(r)(c_x\mathrm{d}x+c_y\mathrm{d}y+c_z\mathrm{d}z).$$

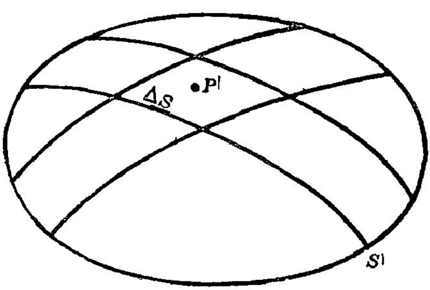
இது ஒரு நிறை வகையீடன்று. (22) இலுள்ள நிபந்தனைகள் திருப்திப் படா எனபதை வாய்ப்புப் பார்க்கலாம.

இவ்வகையில் **A** யானது ஓர் அழுத்தக காவியன்று.

ஒரு மூடிய வளையி C யின் வழியே ஒரு காவி **A** யின் தொகையீடு, அதாவது $\int_C \mathbf{A}.\mathbf{ds}$ ஆனது அம்மூடிய வளையி C யைச் சுற்றி **A** யின் **சுற்றோட்டம்** எனப்படும.

4.3. பரப்புத் தொகையீடுகள்

(ஒரு மூடிய பரபபாயோ ஒரு தளப் பரப்பாயோ இருக்க வேண்டும் என்னும் நியதியில்லாத) ஒரு பரப்பு S இன்மேல் ஒரு சார்பு ϕ இன் பரப்புத தொகையீடு கோட்டுத தொகையீட்டுக்கு ஒப்பான வழியில் வரையறுககப்படலாம.



படம் 7

அப்பரப்பு $\Delta S_1,\ \Delta S_2,\ \ldots.,\ \Delta S_m$ என்னும் m மூலகங்களாகப் பிரிக்கப்படும் ; $\Delta S_1,\ \Delta S_2,\ \ldots.,\ \Delta S_m$ என்னும் ஒவ்வொரு பரப்பு

மூலகத்திற்குள்ளும் முறையேயுள்ள $P_1, P_2, \ldots, P_m$ என்னும் புள்ளிகளில் $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_m$ என்பன ϕ இன் பெறுமானங்களாக

$$\phi_1 \Delta S_1 + \phi_2 \Delta S_2 + \ldots + \phi_m \Delta S_m \tag{27}$$

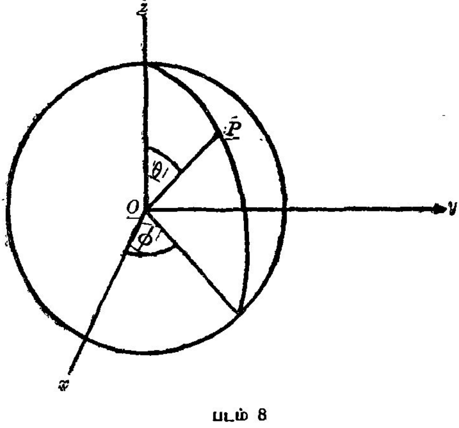
என்னுங் கோவை ஆக்கப்படும். $m \to \infty$ ஆக, $q=1, 2, \ldots, m$ என்னும் ஒவ்வொன்றிற்கும் ஒவ்வொரு $\Delta S_q \to 0$ ஆக, கோவை (27) ஆனது மூலகங்களாகப் பிரிக்கும் விதத்தைச் சாராது ஒரு முடிவுள்ள எல்லையை அணுகினல், இவ்வெல்லையானது S இன்மீது ϕ இன் பரப்புத் தொகையீடு எனப்படும்; அது

$$\int_S \phi dS \tag{28}$$

என எழுதப்படும். இவ்வரைவிலக்கணம் காவித் தொகையீட்டுச் சார்புக்கும் எண்ணித் தொகையீட்டுச் சார்புக்கும் பொருந்தும்.

ஒரு பரப்பிலுள்ள ஒரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகளை இரண்டு பரமானங்கள் பற்றி உணர்த்தலாம்; அப்பரமானங்களை u, v என எழுதலாம். உதாரணமாக, ஆரை a ஆயுள்ள ஒரு கோளத்தின் மீதுள்ள ஒரு புள்ளி P யானது θ, ϕ என்பன படம் 8 இற் காட்டியகோணங்களாகுமிடத்து θ, ϕ என்னும் பரமானங்களாற் பெயர் குறிக்கப்படலாம்.

θ வானது அச்சு Oz இற்கும் ஆரைக்காவி OP யிற்கும் இடையிலுள்ள கோணம். ϕ ஆனது zOx, zOP என்னுந் தளங்களுக்கு இடையிலுள்ள கோணம். P யின் ஆள்கூறுகள் θ, ϕ என்பன பற்றி



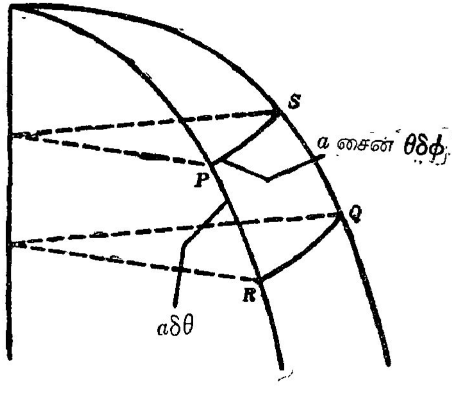
படம் 8

$$x = a \text{ சைன் } \theta \text{ கோசை } \phi,\ y = a \text{ சைன் } \theta \text{ சைன் } \phi,\ z = a \text{ கோசை } \theta \tag{29}$$

என்னுஞ் சமன்பாடுகளால் உணர்த்தப்படலாம். அப்பரப்பின்மீது

$\theta=$ மாறிலி ஆயுள்ள புள்ளிகள் அக்கோளத்தின் ஒரு சிறு வட்டத்தின் மீது கிடக்கும்; $\phi=$ மாறிலி ஆயுள்ள புள்ளிகள் Oz ஐ விட்டமாக வுடைய ஒரு பெருவட்டத்தின்மீது கிடக்கும். இவ்வாறு, $\theta=$ மாறிலி என்பது அப்பரப்பில் வளையியினம் ஒன்றை வரையறுக்கும்; $\phi=$ மாறிலி எனபது அப்பரபபில வேறொரு வளையியினத்தை வரையறுக்கும். அப் பரப்பிலுள்ள யாதுமொரு புள்ளிக்கூடாக $\theta=$ மாறிலி என்னும் இனத் தின் ஒரு வளையியும், $\phi=$ மாறிலி என்னும் இனத்தின் ஒரு வளையியும் செல்லும்.

ஒரு பரப்புத் தொகையீடானது அவ்விரு பரமானங்கள் பற்றியும் ஓர் இரட்டைத் தொகையீடாய் உணர்த்தப்படலாம் என்பதை அவதானிக் கலாம. இனி, அக்கோளமாகிய உதாரணத்தை எடுதது நோக்குமிடத்து, $\theta=$ மாறிலி, $\phi=$ மாறிலி என்னும் வளையிகளை θ, ϕ என்பனவற்றைப் பரமானஙகளாகவுடைய ஒரு புள்ளி P யிற்கூடாகவும் $\theta+\delta\theta$, $\phi+\delta\phi$ என்பனவற்றைப் பரமானஙகளாகவுடைய ஓர் அயற் புள்ளி Q விற்கூடாக வும் நாம் வரைகின்றேமெனக் கொள்க. இவ்வாறு ஆக்கப்படும் மூலகம் $PRQS$ இன் பரபபளவு δS ஆகுக (படம் 9).



படம் 9

அண்ணளவாக $PR=a\delta\theta$, $PS=a$ சைன் $\theta\delta\phi$,

$\delta S=(a\delta\theta)$ (a சைன் $\theta\delta\phi$). எனின், நாம் எடுப்பது

$$dS=a^2 \text{ சைன் } \theta d\theta d\phi \tag{30}$$

பரப்பு S இன்மீது தொகையிடல் θ, ϕ என்பனபற்றி ஓர் இரட்டைத் தொகையீட்டைத் தரும்.

எடுத்துக்காட்டு. $x^2+y^2+z^2=a^2$, $z \geqslant 0$ என்னும் அரைக்கோளத்தின் பரப்பின் மீது

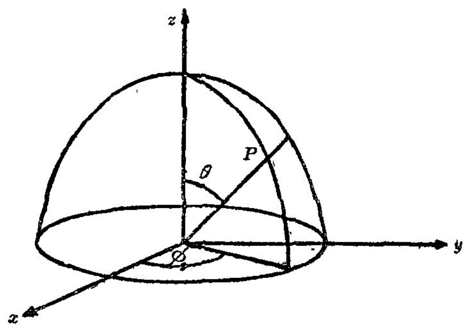
$$\text{(i)} \int dS, \qquad \text{(ii)} \int z dS$$

என்பனவற்றின் பெறுமானங்களைக் கணிக்க.

dS இற்குக் கோவை (30) ஐப் பயன்படுத்த,

$$\int dS = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\phi=0}^{2\pi} a^2 \text{ சைன் } \theta \, d\theta \, d\phi$$
$$= 2\pi a^2.$$

θ, ϕ என்பன முறையே தம் வீச்சுக்களுக்கூடாகச் செல்ல, P என்னும் புள்ளி முழுப் பரப்பையும் ஓடி முடிக்குமாறு தொகையிட எல்லைகள் எடுக்கப்பட்டுள்ளன. $\phi =$ மாறிலியாக, θ வானது 0 இலிருந்து $\pi/2$ இற்கு மாற, P என்னும் புள்ளி ஒரு காலியை வரையும். ϕ ஆனது 0 இலிருந்து 2π இற்கு மாற அக்காலி அரைக்கோளப் பரப்பைப் பிறப்பிக்கும்.



படம் 10

$$\int z dS = \int_0^{\pi/2} \int_0^{2\pi} a \text{ கோசை } \theta \, . \, a^2 \text{ சைன் } \theta \, d\theta \, d\phi$$
$$= 2\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \text{சைன் } \theta \text{ கோசை } \theta \, d\theta = \pi a^3.$$

dS என எழுதப்படுங் காவிப் பரப்பு மூலகத்தை வரையறுத்தல் பயன்படும். அப்பரப்பில் ஒரு புள்ளி P யில் அப்பரப்பிற்கு வெளிமுகமான செவ்வன் வழியே அலகுக் காவி **n** எனக் கொள்க. dS என்பது P யிலுள்ள பரப்பு மூலகமெனின், ஒரு தளப்பரப்பை அப்பரப்பிற்குச் செங்குத்

தான ஒரு காவியினுற் குறிக்கலாமென முன்னர்க் கூறிய குறிப்பை அனுசரித்து, காவிப் பரப்பு மூலகம்

$$\mathbf{dS}=\mathbf{n}dS \tag{31}$$

என வரையறுக்கப்படும்.

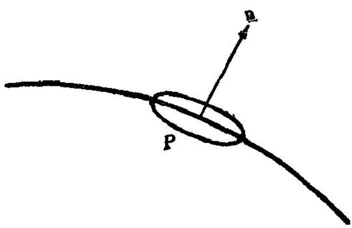
அப்பரப்பின் சமன்பாடு

$$f(x, y, z)=\text{மாறிலி} \tag{32}$$

என்னும் வடிவத்திலே தரப்பட்டால், $P(x, y, z)$ இலுள்ள செங்குத்தின் திசைக் கோசைன்கள் $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$, $\partial f/\partial z$ என்பனவற்றிற்கு விகிதசமம் எனின்,

$$\mathbf{n}=\left[\mathbf{i}\frac{\partial f}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial f}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial f}{\partial z}\right]\Big/\sqrt{\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right\}} \tag{33}$$

$$=\text{படி } f/|\text{படி } f|. \tag{34}$$



படம் 11

அப்பரப்பின் சமன்பாடு u, v என்னும் பரமானங்கள் பற்றி

$$x=x(u, v), \qquad y=y(u, v), \qquad z=z(u, v) \tag{35}$$

என்னும் வடிவத்தில் உள்ள தொடர்புகளாலே தரப்படின், $u=$ மாறிலி என்பது அப்பரப்பின் மீதுள்ள வளையி இனம் ஒன்றின் சமன்பாடாயும், $v=$ மாறிலி என்பது அப்பரப்பின் மீதுள்ள வேருெரு வளையி இனத்தின சமன்பாடாயும் இருக்கும் (படம் 12).

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

என்பன u கூடுதலுறுந் திசையில் $v=$ மாறிலி என்னும் வளையிக்கான தொடலியின் திசைக் கோசைன்களுக்கு விகிதசமமாகி ஒரு காவியை வரையறுக்கும்.

$$\mathbf{l}=\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) \tag{36}$$

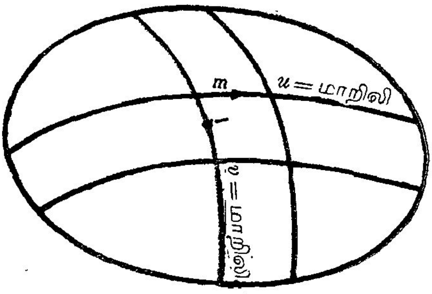
ஆகுமிடத்து இக்காவியை $\mathbf{l}$ என எழுதுவோம்.

அதுபோல,

$$\mathbf{m}=\left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

என்னுங் காவிக்குத் திசை $u=$ மாறிலி என்னும் வளையிக்கான தொடலி வழியே இருக்கும். அப்பரப்பிற்குச் செங்குத்தான அலகுக் காவி

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{l}\times\mathbf{m}}{|\mathbf{l}\times\mathbf{m}|}. \tag{37}$$



படம் 12

பரப்பளவு மூலகத்தை எடுத்து நோக்குதலால்,

$$\mathrm{d}\mathbf{S}=\mathbf{l}\times\mathbf{m}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \tag{38}$$

என்பதையும் நாம் அவதானிக்கலாம்.

கோளவகையில், u வை θ ஆகவும் v ஐ ϕ ஆகவும் எடுக்க, சமன்பாடு (29) தருவன

$$\mathbf{l}=a \text{ கோசை } \theta \text{ கோசை } \phi\mathbf{i}+a \text{ கோசை } \theta \text{ சைன் } \phi\mathbf{j}-a \text{ சைன் } \theta\mathbf{k},$$

$$\mathbf{m}=-a \text{ சைன் } \theta \text{ சைன } \phi\mathbf{i}+a \text{ சைன் } \theta \text{ கோசை } \phi\mathbf{j}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{l}\times\mathbf{m}&=a^2 \text{ சைன்}^2 \theta \text{ கோசை } \phi\mathbf{i}+a^2 \text{ சைன்}^2 \theta \text{ சைன் } \phi\mathbf{j}\\&\qquad+a^2 \text{ சைன் } \theta \text{ கோசை } \theta\mathbf{k}\\&=a^2 \text{ சைன் } \theta\,[\text{சைன் } \theta \text{ கோசை } \phi\mathbf{i}+\text{சைன் } \theta \text{ சைன் } \phi\mathbf{j}+\text{கோசை } \theta\mathbf{k}]\\&=a^2 \text{ சைன் } \theta\mathbf{n}.\end{aligned}$$

(38) தருவது

$$\mathrm{d}\mathbf{S}=a^2 \text{ சைன் } \theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\mathbf{n}$$

என்பதை நாம் வாய்ப்புப் பார்க்கலாம். இது முந்திய முடிபுடன் (30) இசையும்.

ஒரு பரப்பு S இன் மீது ஒரு காவி **A** யின் பரப்புத் தொகையீடு

$$\int_S \mathbf{A}.\mathrm{d}\mathbf{S} \tag{39}$$

என்னும் பொருள்படும். அது

$$\int_S \mathbf{A}.\mathbf{n}\,\mathrm{d}S \text{ என்றுதல்} \int_S A_n \mathrm{d}S \text{ என்றுதல்} \tag{40}$$

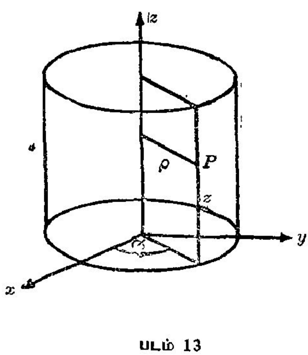
எழுதப்படலாம் ; இங்கு, A_n என்பது குறித்த புள்ளியிலுள்ள வெளிமுகமான செவ்வனின் திசையில் **A** யின் கூற்றைக் குறிக்கும். இத் தொகையீடு பரப்பு **S** இன் வெளியால் **A** யின் **பாயம்** எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு. $\mathbf{A} = \frac{e}{r^3}\mathbf{r}$ ஆயும், S ஆனது $z=0$ இலிருந்து $z=h$ வரைக்கும் உள்ள $x^2+y^2=a^2$ என்னும் உருளையின் வளைபரப்பாயும் இருக்குமிடத்து

$$\int_S \mathbf{A}.\mathrm{d}\mathbf{S}$$

என்பதன் பெறுமானத்தைக் கணிக்க.

இங்கு, $x=\rho$ கோசை ϕ, $y=\rho$ சைன் ϕ, ஆகுமாறு படம் (13) இற்போல உருளை முனைவாள்கூறுகளை எடுத்தல் வசதியாகும்.



படம் 13

பரப்பின் மீது

$$\rho = a, \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi, \qquad 0 \leqslant z \leqslant h.$$

$$\mathbf{A} = \frac{e}{r^3}\mathbf{r} = \frac{e}{(a^2+z^2)^{3/2}}[a \text{ கோசை } \phi\mathbf{i} + a \text{ சைன் } \phi\mathbf{j} + z\mathbf{k}]$$

$$\mathbf{n} = \text{கோசை } \phi\mathbf{i} + \text{சைன் } \phi\mathbf{j}$$

$$A_n = \frac{e}{(a^2+z^2)^{3/2}}\,(a \text{ கோசை}^2\,\phi + a \text{ சைன்}^2\,\phi) = \frac{ea}{(a^2+z^2)^{3/2}}.$$

$$\mathrm{d}S = a\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z$$

$$\int_S \mathbf{A}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_{z=0}^{h}\int_{\phi=0}^{2\pi}\frac{ea^2}{(a^2+z^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\phi$$

$$= 2\pi e a^2\int_0^h \frac{\mathrm{d}z}{(a^2+z^2)^{3/2}} = \frac{2\pi e h}{\sqrt{(a^2+h^2)}}.$$

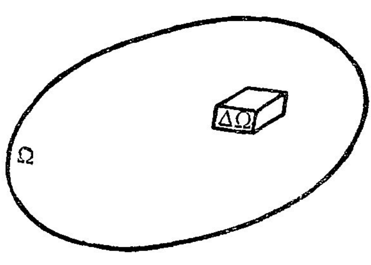
4.4 கனவளவுத் தொகையீடுகள்

கனவளவுத தொகையீடானது கோட்டுத் தொகையீடும் பரப்புத் தொகையீடும் வரையறுக்கப்படும் அதே வழியால் வரையறுக்கப்படலாம் : அதாவது, தந்த ஒரு கனவளவு Ω ஆனது முறையே $\Delta\Omega_1$, $\Delta\Omega_2$, . . . $\Delta\Omega_m$ என்னுங் கனவளவுடைய m மூலகங்களாகப் பிரிக்கப்படும் ; $q=1, 2, \ldots, m$ ஆக $\Delta\Omega_q$ என்னுங் கனவளவிற்குள் உள்ள ஒரு புள்ளியில் ϕ இன் பெறுமானத்தை ϕ_q என்பது குறிக்குமிடத்து

$$\phi_1\Delta\Omega_1 + \phi_2\Delta\Omega_2 + \ldots . + \phi_m\Delta\Omega_m \tag{41}$$

என்னுங் கோவை ஆக்கப்படும்.

$m\to\infty$ ஆகவும், ஒவ்வொரு q விற்கும் $\Delta\Omega_q\to 0$ ஆகவும், கோவை (41) ஆனது மூலகங்களாகப் பிரிக்கப்படும் விதத்தைச் சாராது ஒரு முடிவுளி மூலகத்தை அணுகின், அவ்வெல்லை கனவளவு Ω இன் மீது ϕ இன் கனவளவுத் தொகையீடெனப்படும் ; அது



படம் 14

$$\int_\Omega \phi\,\mathrm{d}\Omega \tag{42}$$

என எழுதப்படும். இவ்வரைவிலக்கணங் காவித தொகையீட்டுச் சார்பு, எண்ணித்தொகையீட்டுச் சார்பு என்னும் இரண்டுக்கும் பொருந்தும்.

ஒரு கனவளவுத் தொகையீடு ஒரு மும்மைத தொகையீட்டுக்குச் சமன். டெக்காட்டாள்கூறுகளில், அச்சுக்களுக்கு முறையே சமாந்தரமான பக்கங் கள் dx, dy, dz என்பனவற்றையுடைய ஒரு செவ்வகத்திண்மத்தை நுண்ணளவான கனவளவு மூலகமாகக் கொண்டால்,

$$d\Omega = dx\, dy\, dz. \tag{43}$$

பொதுவாக,

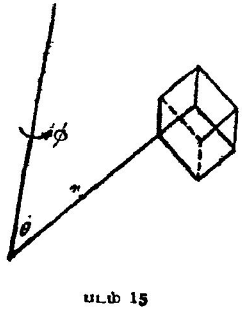
$$x = x(u, v, w), \qquad y = y(u, v, w), \qquad z = z(u, v, w) \tag{44}$$

என்னும் வடிவத்தில் ஒரு புள்ளியின் ஆள்கூறுகளை உணர்த்துதற்கு நாம் u, v, w (எண்க) என்னும் மூன்று பரமானங்களைப் பயன்படுத்தலாம். அப்போது, கனவளவுத் தொகையீடு u, v, w என்னும் மூன்று பரமானங்கள பற்றியும் ஒரு மும்மைத் தொகையீடாகும்.

கோள முனைவாளகூறுகளில், r ஆனது ஆரைத் தூரமாயும் θ, ϕ எனபன முன்னர் படம (8) இற காட்டிய கோணங்களாயுமிருக்குமிடத்து, r, θ, ϕ என்பன பரமானங்கள் எனக கொள்ளலாம். x, y, z என்பனவற்றையும் r, θ, ϕ என்பனவற்றையுந் தொடர்பாக்குஞ் சமன் பாடுகள்

$$x = r \text{ சைன் } \theta \text{ கோசை } \phi, \quad y = r \text{ சைன் } \theta \text{ சைன் } \phi, \quad z = r \text{ கோசை } \theta. \tag{45}$$

தன் பரமானங்கள r, θ, ϕ ஆயுள்ள ஒரு புள்ளிக்கூடாகவும் பரமானங் கள $r+\delta r$, $\theta+\delta\theta$, $\phi+\delta\phi$ ஆயுள்ள ஓர் அயற்புள்ளிக்கூடாகவும் $r=$ மாறிலி, $\theta=$ மாறிலி, $\phi=$ மாறிலி என்னும் பரப்புக்களை நாம் வரைந் தால், தன் பக்கங்கள் அண்ணளவாக δr, $r\delta\theta$, r சைன் $\theta\delta\phi$ ஆயுள்ள ஒரு சிறு பெட்டியை நாம் பெறுவோம் (படம் 15).



படம் 15

எனின்,

$$d\Omega = r^2 \text{ சைன் } \theta\, dr\, d\theta\, d\phi \tag{46}$$

$x = \rho$ கோசை ϕ, $y = \rho$ சைன் ϕ, $z = z$ ஆகுமிடத்து, நாம் ρ, ϕ, z என்றும் உருளை முனைவாளகூறுகளை வழங்கினால்

$$d\Omega = \rho\, d\rho\, d\phi\, dz \tag{47}$$

பொதுவாக, ஆள்கூறுகள் பரமான வடிவத்தில் (44) ஐப் போன்ற சமன்பாடுகளாலே தரப்படின் (நிறுவலைத் தராது) நாம் கூறுவது

$$d\Omega = J\, du\, dv\, dw \tag{48}$$

இங்கு
$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial w} & \frac{\partial y}{\partial w} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \tag{49}$$

என்பது x, y, z இலிருந்து u, v, w இற்கு மாற்றப்பட்ட **உருமாற்றத்தின் யாக்கோபியன்** எனப்படும். இச்சிறப்புவகைகளில் (48) ஆனது (46) ஓடும் (47) ஓடும் இசையும் என்பதை நாம் வாய்ப்புப் பார்க்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு. $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

என்னும் நீள்வளையவுருவின் கனவளவைக் காண்க.

$x = aX$, $y = bY$, $z = cZ$ ஆகுமிடத்து x, y, z இலிருந்து X, Y, Z இற்கு ஆள்கூற்றுருமாற்றமொன்றை ஏற்படுத்துக.

எனின், $$dx\, dy\, dz = abc\, dX dY dZ.$$

புதிய ஆள்கூற்றுத் தொகுதியில் அந்நீள்வளையவுருவின் பரப்பு $X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$ என்னுங் கோளத்திற்கு உருமாறும். எனின், அந் நீள்வளையவுருவின் கனவளவு

$$\iiint_{\text{நீள்வளையவுரு}} dx\, dy\, dz = abc \iiint_{\text{அலகுக் கோளம்}} dX dY dZ.$$

வலக்கைப்பக்கத்துத் தொகையீட்டுச் சார்பு அலகுக் கோளத்தின் கன வளவு மாத்திரமாய் இருக்கும்; ஆகவே, அது $(\frac{4}{3})\pi$ ஆகும். எனின், வேண்டிய கனவளவு $(\frac{4}{3})\pi abc$.

கோள முனைவாள்கூறுகளை வழங்கும் ஒரு பிரயோகமாய் அலகாரை யுள்ள ஒரு கோளத்தின் கனவளவுக்குரிய $(\frac{4}{3})\pi$ என்னுங் கோவையைப் பெறுதல் சுவையானதாம். (46) ஐப் பயன்படுத்த இக்கனவளவு

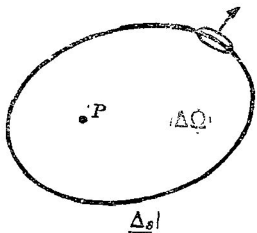
$$\int_{r=0}^{1}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\phi=0}^{2\pi} r^2 \text{ சைன் } \theta\, dr\, d\theta\, d\phi$$

$$=2\pi\int_0^1\int_0^\pi r^2 \text{ சைன } \theta\, dr\, d\theta = 2\pi\int_0^1 r^2\, dr \left[-\text{கோசை } \theta\right]_0^\pi$$

$$=2\pi\,.\,2\,.\int_0^1 r^2\, dr = \frac{4}{3}\pi.$$

4.5. விரிகை

ஒரு காவிப் புலம் **A** யானது தரப்பட்டால், யாதுமொரு புள்ளி **P** யில் அதன் விரிகை பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும்.



படம் 16

$\Delta\Omega$ என்பது புள்ளி P யைச் சுற்றியிருக்கும் ஒரு சிறு கனவளவாகுக ; அதன் எல்லைப் பரப்பு ΔS ஆகுக. $\int_{\Delta S} A_n dS$ என்பது பரப்பு ΔS இற்கு வெளியே **A** யின் பாயமாகும். அப்பரப்பால் அடைக்கப்படுங் கனவளவிற்கு இப்பாயத்தின் விகிதத்தை எடுத்து நோக்குக ; அதாவது

$$\frac{\int_{\Delta S} A_n dS}{\Delta\Omega} \tag{50}$$

எனனுங் கோவையை எடுத்து நோக்குக. புள்ளி P யை இன்னும் அடைத்துக் கொண்டிருக்குங் கனவளவு $\Delta\Omega \to 0$ ஆக, கோவை (50) ஒரு முடிவுள்ளி எல்லையை அணுகுமாறு **A** யிருந்தால், இவ்வெல்லை Δ **புள்ளி** P **யில் A யின் விரிகை** எனப்படும் ; அது விரி **A** என எழுதப்படும். விரி **A** என்பது ஓர் எண்ணிக் கணியமாய் P யில் அலகுக் கனவளவிற்கு **A** யின் பாயத்தைக் குறிக்கும். இவ்வாறு விரி **A** யானது ஓர் எண்ணிப் புலத்தை வரையும்.

உதாரணமாக, புள்ளிக் காவி **v** ஆனது ஓர் அசையுந் திரவத்தின் வேகப் புலத்தைத் தர, அத்திரவம் தன் கண்ணே ஒரு புள்ளி Q விலுள்ள ஓர் ஊற்றிலிருந்து மாறு வீதத்தில் அத்தொகுதிக்குட் புகுந்

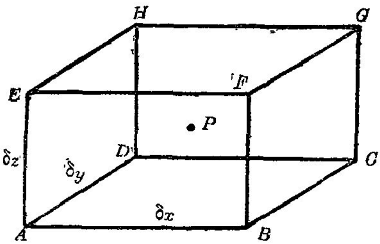
தால், Q யில் விரி $\mathbf{v}$ ஆனது அவ்வூற்று வலிமையின் அளவாகும். ஊற்றுக்களாதல் உறிஞ்சிகளாதல் இல்லாத வேறு புள்ளிகளில்,

$$\text{விரி } \mathbf{v} = 0.$$

தெக்காட்டாள்கூறுகளில் விரி A

அச்சுககளுக்குச் சமாந்தரமான δx, δy, δz ஆகிய பக்கங்களையுடைய ஒரு செவ்வகப் பெட்டியானது புள்ளி P (x, y, z) ஐ மையமாகக் கொண்டு ஆக்கப்பட்டுளளது ; மேலே தரபபட்ட வரைவிலக்கணம் P யிலு ள்ள விரி $\mathbf{A}$ யைத் துணிதற்கு இப்பெட்டியின தொடர்பிலே பிர யோகிக்கப்படும்.

கோவை (50) இன் தொகுதியின (numerator) பெறுமானங் கணித்தலில், அத்திண்மத்திறகு ஆறு முகங்கள் உண்டு என்பதை அவதானிக்கலாம். அவறறைச் சமாந்தர முகச சோடுக் கூட்டங்களாக்குதல் வசதியாகும். $BCGF$ என்னும் முகம் உதவும் பங்கை எடுத்து நோக்கி, அம் முகத்தின் பரப்பளவு $\delta y \delta z$ என அவதானிக்க, நாம் பாயம் அண்ணளவாக



படம் 17

$$A_x(x + \tfrac{1}{2}\delta x, y, z)\, \delta y\, \delta z$$

எனப் பெறுவோம. $ADHE$ என்னும் முகத்திலிருநது வரும் பஙகு

$$-A_x(x - \tfrac{1}{2}\delta x, y, z)\, \delta y\, \delta z.$$

சயக்குறி வருவதறகுக் காரணம் இம்முகத்திற்கு வெளிமுகமான செவ்வன் x – அச்சின் எதிர்த்திசையில் இருப்பதே. இந்த இரண்டு முகங்களும் ஒருங்கு தரும் பங்குகளை எடுக்க நாம் பெறுவது

$$[A_x(x + \tfrac{1}{2}\delta x, y, z) - A_x(x - \tfrac{1}{2}\delta x, y, z)]\, \delta y\, \delta z\ ;$$

இது அண்ணளவாக

$$\frac{\partial A_x}{\partial x}\, \delta x \delta y \delta z.$$

அதுபோல, ஏனையிரண்டு முகச சோடுகளிலுமிருந்து அப்பாயத்திற்கு வரும் பங்குகள் $\frac{\partial A_y}{\partial x}\delta x\delta y\delta z$, $\frac{\partial A_z}{\partial z}\delta x\delta y\delta z$ என்பன.

இவ்வாறு மொத்தப பாயம் அண்ணளவாக

$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial y}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\delta x\delta y\delta z.$$

அன்றியும், $\Delta\Omega=\delta x\delta y\delta z.$

எனின், கோவை (50) ஐ ஆகசி எலலைக்குச செலல நாம் பெறுவது

$$\text{விரி } \mathbf{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{51}$$

உதாரணமாக, $\mathbf{A}=\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ எனின்,

$$\text{விரி } \mathbf{A}=\frac{\partial}{\partial x}(x)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z)=3.$$

$\mathbf{A}=$ படி ϕ எனின்,

$$\text{விரி (படி } \phi)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)$$

$$=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}.$$

$$\mathbf{A}=-\frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i}+\frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j} \text{ எனின்,}$$

$$\text{விரி } \mathbf{A}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

$$=(-y)\frac{(-1)(2x)}{(x^2+y^2)^2}+(x)\frac{(-1)(2y)}{(x^2+y^2)^2}=0.$$

தன விரிகை எங்கும மறைகின்ற ஒரு காவி வரிச்சுருளானது எனப்படும். இககாவிகள் பௌதிகவியலின் பல வேறு கிளைகளிற் பயன்படும்.

λ என்பது ஒரு மாறுவெண்ணுகுமிடத்து,

$$\text{விரி } (\mathbf{A}+\mathbf{B})=\text{விரி } \mathbf{A}+\text{விரி } \mathbf{B},$$

$$\text{விரி } (\lambda\mathbf{A})=\lambda \text{ விரி } \mathbf{A}$$

என்னுஞ் சமன்பாடுகளை வரைவிலக்கணத்திலிருந்து எளிதிற் பெறலாம்.

ϕ ஆனது ஓர் எண்ணிப் புள்ளிச் சார்பாயும் $\mathbf{A}$ யானது ஒரு காவிப் புள்ளிச் சார்பாயும் இருந்தால்,

$$\text{விரி } (\phi\mathbf{A})=\phi \text{ விரி } \mathbf{A}+(\text{படி } \phi).\mathbf{A} \tag{52}$$

என்று காட்டலாம். டெக்காட்டாள்கூறுகளைப் பயன்படுத்தினல்,

$$இ.கை.ப. = \frac{\partial}{\partial x}(\phi A_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\phi A_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\phi A_z).$$

$$= \phi \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} A_x + \phi \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial y} A_y + \phi \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial z} A_z$$

$$= \phi \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} A_x + \frac{\partial \phi}{\partial y} A_y + \frac{\partial \phi}{\partial z} A_z \right)$$

$$= வ.கை.ப.$$

டெக்காட்டாள்கூறுகளுக்கு இம்முடிபைக் காட்டினேம். ஆனல், இது எவ்வாள்கூற்று முறையிலும் உண்மையாகும்.

4.6. கவுசின் உருமாற்றம்

S ஆனது Ω என்னும் இடக் கனவளவை அடைக்கும் ஒரு மூடிய பரப்பாக, $\mathbf{A}$ யானது ஒரு காவிப்புலமெனின்

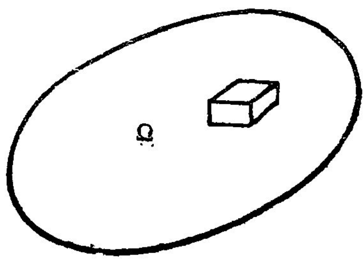
$$\int_S \mathbf{A}.\, d\mathbf{S} = \int_\Omega விரி\ \mathbf{A} d\Omega \qquad (53)$$

இம்முடிபைப் பின்வருமாறு பெறலாம் :

பரப்பின் அளவு ΔS_q, $q = 1, 2, \ldots, m$ ஆயும் கனவளவு $\Delta\Omega_q$ ஆயுமுள்ள ஒரு தொகை கலங்களாக அக்கனவளவைப பிரிக்க. விரிகை யானது கோவை (50) இன எல்லே என்னும் வரைவிலக்கணத்திலிருந்து ஒவ்வொரு q விறகும்

$$\int_{\Delta S_q} A_n\, dS = விரி\ A\ d\Omega_q + \epsilon_q \Delta\Omega_q \qquad (54)$$

என எழுதப்படலாம் ; இங்கு, $\Delta\Omega_q \to 0$ ஆக, $\epsilon_q \to 0$.



படம் 18

$q=1, 2, \ldots, m$ என்பனவற்றிற்கு இச்சமன்பாடுகள் எல்லாவற்றை யுங் கூட்டி, அயற் கலங்களின அடுத்துள முகங்களிலிருந்து அப்பாயத் திற்கு உதவப்படும் பங்கு கூட்டலிற் பூச்சியமாகின்றன என அவதானித்து $m \to \infty$ ஆக ஒவ்வொரு q விற்கும் $\Delta\Omega_q \to 0$ என்னும் எல்லைக்கு மேற் செல்ல விளைவு (53) பெறப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு 1. சமன்பாடு (53) இல்,

$$\mathbf{A} = \mu\mathbf{r}$$

ஆகுமிடத்து பரப்புத தொகையீடுங் கனவளவுத தொகையீடுஞ் சமம் என்பதை வாய்ப்புப பார்க்க; இங்கு, μ ஆனது ஒரு மாறிலி ; $\mathbf{r}$ ஆனது ஆரைக்காவி ; தொகையிடற் பரப்பு உற்பத்தியில் மையத்தையும் a எனனும் ஆரையையும் உடைய கோளம்.

கோளப் பரப்பின மீது $|\mathbf{r}| = a$,

$$\mathbf{n} = \mathbf{r}/a.$$

இது தருவது $A_n = \mu\mathbf{r}.\mathbf{n} = \mu a.$

எனின்,
$$\int_S A_n \, \mathrm{d}S = \mu a \int \mathrm{d}S = \mu a . 4\pi a^2 = 4\pi\mu a.^3$$

$$\text{விரி } \mathbf{A} = 3\mu.$$

$$\therefore \int_\Omega \text{விரி } \mathbf{A} \, \mathrm{d}\Omega = 3\mu \int_\Omega \mathrm{d}\Omega = 3\mu \left(\tfrac{4}{3}\right)\pi a^3 = 4\pi\mu a.^3$$

எடுத்துக்காட்டு 2. S ஆனது

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

என்னும் நீள்வளையவுருவின் பரப்பெனின்,

$$\int_S \frac{\mathrm{d}S}{p}$$

என்பதன் பெறுமானத்தைக் கணிக்க ; இங்கு, p ஆனது உற்பத்தியிலிருந்து அந்நீள் வளையவுரு மீதுள்ள புள்ளி $P\,(x, y, z)$ இல் வரையப்படுந் தொடலித் தளத்தின் செங்குத்துத் தூரம்

உற்பத்தியிலிருந்து தொடலித் தளத்தின் செங்குத்துத் தூரம்

$$p = 1 \Big/ \sqrt{\left\{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right\}}.$$

அந்நீள்வளையவுருவுக்கு P யிலுள்ள செவ்வன்

$$\left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2}\right)$$

என்பனவற்றிற்கு விகித சமமான திசைக் கோசைன்களை உடையதாகும். இவ்வாறு அச்செங்குத்தின் வழியே அலகுக் காவி

$$\mathbf{n} = \left(\frac{px}{a^2}, \frac{py}{b^2}, \frac{pz}{c^2}\right)$$

எனக் காணப்படும்.

$$\mathbf{A} = \left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2}\right)$$

என நாம் எடுக்கினமேருமென நினைக்க. இவ்வாறு நாம் எடுககலாம்; அதற்குக் காரணம் அவ்வாறு தேர்ந்தெடுக்கபபடும A யானது ஒரு காவியாகுமென்பதே; அதாவது $\mathbf{A} = (1/p)\,\mathbf{n}$; உருமாற்றம் (53) ஐப் பிரயோகிக்க.

$$A_n = \frac{px}{a^2}.\frac{x}{a^2} + \frac{py}{b^2}.\frac{y}{b^2} + \frac{pz}{c^2}.\frac{z}{c^2} = \frac{1}{p}.$$

எனின் (53) இல், பரப்புத் தொகையீடு

$$\int \frac{1}{p}\,\mathrm{d}S.$$

இனி,

$$\text{விரி } \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{a^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{a^2}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{a^2}\right)$$

$$= \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

எனின், கனவளவுத் தொகையீடு

$$\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\int \mathrm{d}\Omega = \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right)\tfrac{4}{3}\pi abc.$$

இவ்வாறு நாம் பெறுவது

$$\int_S \frac{\mathrm{d}S}{p} = \tfrac{4}{3}\pi abc\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$$

இங்கு, நாம் பரப்புத் தொகையீட்டின் பெறுமானத்தை நேரே கணிக்கவில்லை; ஆனால், கவுசின் உருமாற்றத்தைத் துணைக் கொண்டு பெறுமானங் கணித்தற்கு எளிதான ஒரு கனவளவுத் தொகையீடாக அதனை உருமாற்றி அதன் பெறுமானத்தைத் துணிநதுள்ளோம்.

4.7. சுருட்டை A

ஒரு காவிப்புலம் A யும் வேறொரு காவிப்புலமும் தரப்பட்டால், சுருட்டை A யானது பின்வரும் விதத்தில் அதிலிருந்து பெறப்படலாம்.

ΔS ஆனது ஒரு புள்ளி P யிலுள்ள ஒரு பரபபு மூலகமெனக் கொளக. அம்மூலகத்தின் ஓரம் ΔC எனனும் மூடிய வளையி ஆகுக. $\mathbf{n}$ ஆனது

அப்பரப்புக்கு P யிலுள்ள செவ்வன் வழியே அலகுக் காவியாகுக. அம் மூடிய வளையி ΔC யின் மீது **A** யின் கோட்டுத் தொகையீடு அதாவது ΔC ஐச் சுற்றி **A** யின் சுற்றோட்டம்

$$\oint_{\Delta c} \mathbf{A}.\,\mathrm{ds}$$

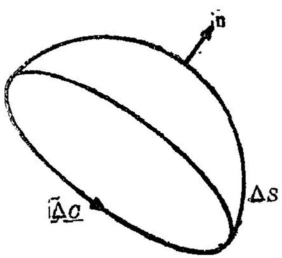
கோவை

$$\frac{\oint_{\Delta c} \mathbf{A}.\,\mathrm{ds}}{\Delta S} \tag{55}$$

ஆக்கப்பட்டுள்ளது ; $\Delta S \rightarrow 0$ ஆக, அதன் நடத்தை ஆராயப்படும். கோவை (55) ஒரு முடிவுள்ள எல்லையை அணுகினால், இவ்வெல்லை

$$(\text{சுருட்டை } \mathbf{A})_{\mathbf{n}} \tag{56}$$

இன் பெறுமானத்தை வரையறுக்கும் ; இது அப்பரப்பின் செவ்வன் **n** இன் வழியே ஒரு நியதியான காவிச் சுருட்டை **A** யின் கூறுகும். அச்செவ்வனின் போக்கும், அச்சுற்றோட்டம் எடுக்கப்படும் போக்கும் வலஞ் சுழித்திருகு விதியாற் சம்பந்தப்படும்.

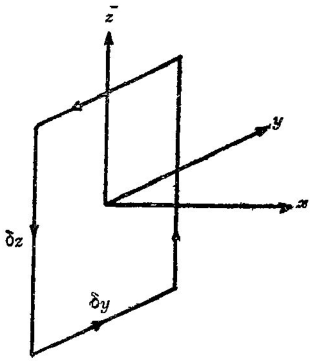


படம் 19

தெக்காட்டுக் கூறுகளிற் சுருட்டை A

x-திசையில், சுருட்டை **A** யின் கூற்றைக் காண்பதற்கு, (சுருட்டை $\mathbf{A})_{\mathbf{n}}$ இன் வரைவிலக்கணத்திற்கு விவரித்த செய்முறை பிரயோகிக்கப்படும் ; அப்போது, பரப்பு S ஆனது மையம் P (x, y, z) ஆகவுள்ள ஒரு சிறு செவ்வகப் பரப்பென்றும், அச்செவ்வகத்தின் பக்கங்கள் y-அச்சிற்கும் z-அச்சிற்குஞ் சமாந்தரமென்றும், அப்பக்கங்களின் நீளங்கள் முறையே δy, δz என்றும், x-அச்சானது அச்செவ்வகத்தின் தளத்திற்குச் செவ்வன்

என்றும் கொள்ளப்படும். படம் 20 இற் சுட்டிக் காட்டிய போக்கில் அச்செவ்வகத்தின் சுற்றளவைச் சுற்றி எடுக்கப்பட்ட $\oint \mathbf{A.ds}$ என்பது அண்ணளவாக



படம் 20

$$A_y\left(x, y, z-\tfrac{1}{2}\delta z\right)\delta y + A_z\left(x, y+\tfrac{1}{2}\delta y, z\right)\delta z$$
$$-A_y\left(x, y, z+\tfrac{1}{2}\delta z\right)\delta y - A_z\left(x, y-\tfrac{1}{2}\delta y, z\right)\delta z$$
$$= -\frac{\partial A_y}{\partial z}\delta z\delta y + \frac{\partial A_z}{\partial y}\delta y\delta z.$$
$$\Delta S = \delta y\,\delta z.$$

எனின், கோவை (55) இன் எல்லை தருவது

$$\left.\begin{aligned} &(\text{சுருட்டை } \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \\ \text{அதுபோல,}\quad &(\text{சுருட்டை } \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \\ \text{இவ்வாறு}\quad &(\text{சுருட்டை } \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{aligned}\right\} \qquad (57)$$

$$\text{சுருட்டை } \mathbf{A} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$
$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \qquad (58)$$

ஒரு துணிகோவையாகத் தரப்பட்ட கோவை (58) நினைவில் வைத்திருத்தற்கு வசதியான வடிவத்தில் இருககின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 1. $\mathbf{A} =$ படி ϕ எனின், சுருட்டை $\mathbf{A}$ யைக் காண்க.

$$A_x=\frac{\partial\phi}{\partial x},\ A_y=\frac{\partial\phi}{\partial y},\ A_z=\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

(57) இலிருந்து,.

$$(\text{சுருட்டை } \mathbf{A})_x=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z}-\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y}=0.$$

அதுபோல, $(\text{சுருட்டை } \mathbf{A})_y=0$; $(\text{சுருட்டை } \mathbf{A})_z=0.$

இவ்வாறு, $\text{சுருடடை } (\text{படி } \phi)\equiv\mathbf{0}.$

எடுத்துக்காட்டு 2. ω ஆனது ஒரு மாறிலியாயிருக்குமிடத்து, $\mathbf{A}=(-\omega y,\ \omega x,\ 0)$ எனின், சுருட்டை $\mathbf{A}$ யைக் காண்க.

$$(\text{சுருட்டை } \mathbf{A})_x=\frac{\partial}{\partial y}(0)-\frac{\partial}{\partial z}(\omega x)=0$$

$$(\text{சுருட்டை } \mathbf{A})_y=\frac{\partial}{\partial z}(-\omega y)-\frac{\partial}{\partial x}(0)=0$$

$$(\text{சுருட்டை } \mathbf{A})_z=\frac{\partial}{\partial x}(\omega x)-\frac{\partial}{\partial y}(-\omega y)=2\omega.$$

இவ்வாறு சுருடடை $\mathbf{A}=(0,\ 0,\ 2\omega).$

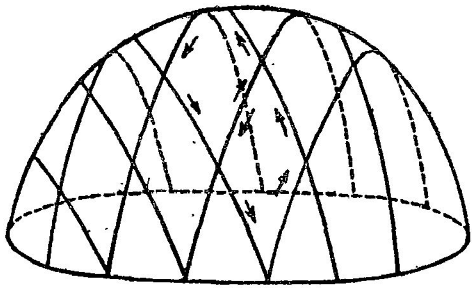
$\mathbf{v}$ ஆனது ஓா அசையுந திரவத்தின் வேகப்புலததை வரைந்தால், சுருடடை $\mathbf{v}$ எனபது அத்திரவததின **உந்திமை** எனபபடும். ஒரு திரவததிற்குச் சுழலியககம் இலலையாயின, (உதாரணமாக, அது ஒரு கால்வாயின வழியே ஒரு சீராய் இயஙகுமெனின்) சுருடடை $\mathbf{v}=\mathbf{0}$. மேலே தந்த உதாரணததில, $\mathbf{A}$ யானது z – அச்சுப் பற்றி மாறுக் கோண வேகத்தோடு உறுதியாகச சுழலும் ஒரு திரவததின வேகமாகும். இவ் வகையில், உநதிமைக காவிககு x திசையிலாதல y திசையிலாதல் கூறு யாதுமிலலை ; z திசையிற கூறு உணடு.

4.8. ஸ்ற்றேக்கின் தேற்றம்

ஒரு காவிப புலம $\mathbf{A}$ யும் ஒரு மூடிய வளையி C யைத் தனனெல்லை யாகவுள்ள ஒரு பரபபு S உந் தரபபடடால்,

$$\oint_C \mathbf{A}.d\mathbf{s}=\int_S(\text{சுருட்டை } \mathbf{A})_n\, dS. \tag{59}$$

S ஐ படம் (21) இல் உள்ளவாறு C_q $(q=1, \ldots, m)$ என்னுஞ் சுற்றுக் கள் கொண்ட ΔS_q என்னுஞ் சிறு பரப்புக்களாகப் பிரிக்க. கோவை (55) இன் எல்லையாகச் சுருட்டை $\mathbf{A}$ யின் வரைவிலக்கணத்திலிருந்து ஒவ் வொரு q விற்கும் நாம் பெறுவது



படம் 21

$$\oint_{C_q} \mathbf{A}.\mathrm{d}\mathbf{s} = (\text{சுருட்டை } \mathbf{A})_{\mathbf{n}}\Delta S_q + \epsilon_q \Delta S_q \tag{60}$$

இங்கு, $\Delta S_q \to 0$ ஆக, $\epsilon_q \to 0$. $q = 1, 2, \ldots, m$ எனபனவற்றிற்கு (60) என்னும் எல்லாச சமனபாடுகளையுங் கூட்டி, அயல் வலைக்கண்களின் அடுததுள எல்லைகளிலிருந்து சுற்றோட்டத்திறகு உதவும் பங்குகள் பூச்சிய மாகின்றன என்பதைக் குறிப்பாக அறிந்து $m \to \infty$ என்னும் எல்லைக்கு மேறசெல்ல, முடிவு (59) பெறப்படும்.

எடுத்துக்காட்டு.

பரப்பு S ஆனது $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geqslant 0$ என்னும் அரைக் கோளமாகும். $\mathbf{A}$ ஆனது (y, z, x) என்பனவற்றைத் தன்கூறுகளாகவுள்ள காவி. ஒவ்வொரு பக்கத்தின் பெறுமா னத்தையும் நேர்முறையாகக் காணுதலால் ஸ்ற்றோக்கின் தேற்றத்தை வாய்ப்புப் பார்க்க.

(லணடன S. 1944)

கோள முனைவாள்கூறுகளை வழங்க,

$$\mathbf{n} = \text{சைன் } \theta \text{ கோசை } \phi \mathbf{i} + \text{சைன்} \theta \text{சைன } \phi \mathbf{j} + \text{கோசை } \theta \mathbf{k}.$$

$\mathbf{A} = (y, z, x)$ ஆதலால், சுருடடை $\mathbf{A} = -(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$

$$(\text{சுருட்டை } \mathbf{A})_{\mathbf{n}} = -\text{சைன் } \theta \text{ கோசை } \phi - \text{சைன் } \theta \text{ சைன } \phi - \text{கோசை } \theta.$$

ஆகவே, $$\int_S (\text{சுருட்டை } \mathbf{A})_{\mathbf{n}} \mathrm{d}S = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\phi=0}^{2\pi} [-\text{சைன் } \theta \text{ கோசை } \phi - \text{சைன் } \theta \text{ சைன்} \phi - \text{கோசை } \theta] \text{ சைன் } \theta \, \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\phi.$$

$$= -2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{சைன் } \theta \text{ கோசை } \theta \, \mathrm{d}\theta = -\pi.$$

இனி, $x^2+y^2=a^2,\ z=0$ என்னும் வட்டத்தின் மீது

$$\mathrm{ds}=(-a\ \text{சைன்}\ \phi\mathbf{i}+a\ \text{கோசை}\ \phi\mathbf{j})\,\mathrm{d}\phi$$

$$\mathbf{A}.\mathrm{ds}=-\text{சைன்}^2\,\phi\,\mathrm{d}\phi$$

$$\oint_C \mathbf{A}.\mathrm{ds}=-\int_0^{2\pi}\text{சைன்}^2\,\phi\,\mathrm{d}\phi=-\pi.$$

இதனுல் அம்முடிபு சரியென அறிகிருேம். ஸ்ற்ருேக்கின் தேற்றம் கோட்டுத் தொகையீடுகளிலிருந்து பரப்புத் தொகையீடுகளுக்கும் பரப்புத் தொகை யீடுகளிலிருந்து கோட்டுத் தொகையீடுகளுக்கும பயனபடும் உருமாற்றங் களைத் தரும் ; அதற்குப் பல பிரயோகங்கள உண்டு.

4.9. செயலி ∇

ஓர் எண்ணிப் புள்ளிச் சார்பு ϕ இன் படித்திறன் டெக்காட்டாள்கூறுகளில்,

$$\text{படி}\ \phi=\mathbf{i}\frac{\partial\phi}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\phi}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{61}$$

என எழுதப்படலாமெனக் கண்டோம் ; இங்கு, $\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}$ என்பன முறையே மூன்றச்சுக்களின வழியேயும் எடுக்கபபடும் அலகுக் காவிகள். செயலி

$$\nabla\equiv\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{62}$$

என்பதை புகுத்துதல்.

இது “ நபிளா ” செயலி என்ருதல் “ தெல் ” செயலி என்ருதல் கூறபபடும்.

∇ என்னுஞ் செயலி பற்றி

$$\text{படி}\ \phi=\nabla\phi. \tag{63}$$

செயலி ∇ ஐப் புகுத்துதல காவி நுண்கணிதத்தின் சில நியதியான சமன்பாடுகளை எழுதுதற்கு ஒரு சுருக்க வழியைத் தரும். ∇ என்பது ஒரு வகையீட்டுக் காவிச் செயலி ; அது வகையிடுதற்குரியதென்பதன் காரணம் அது $\frac{\partial}{\partial x},\ \frac{\partial}{\partial y},\ \frac{\partial}{\partial z}$ எனபனவும் அவறறின் சேர்க்கைகளும் போனற வகையீட்டுச் செயலிகளைக கொண்டிருப்பதே ; அது காவியாய் இருததற்குக் காரணம அது $\mathbf{i},\ \mathbf{j},\ \mathbf{k}$ இல் ஒரு படிககுரியதாயிருத்தலே.

இக்குறியீட்டில்,

$$\mathrm{d}\phi=\frac{\partial\phi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\phi}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial\phi}{\partial z}\mathrm{d}z$$

$$=(\nabla\phi).\mathrm{dr}. \tag{64}$$

இனி,
$$\nabla.\mathbf{A}=\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right).(\mathbf{i}A_x+\mathbf{j}A_y+\mathbf{k}A_z)$$
$$=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=\text{விரி }\mathbf{A}.$$
$$\nabla\times\mathbf{A}=\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(\mathbf{i}A_x+\mathbf{j}A_y+\mathbf{k}A_z)$$
$$=\mathbf{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\mathbf{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\mathbf{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$
$$=\text{சுருட்டை }\mathbf{A}.$$

எனின, காவி நுண்கணிதத்தில் விசேடமாய்க் கற்கப்பட்ட கணியங்கள் மூன்றும் (அவையாவன படி ϕ, விரி $\mathbf{A}$, சுருட்டை $\mathbf{A}$ என்பன) செயலி ∇ பற்றி

$$\left.\begin{aligned}\text{படி }\phi&=\nabla\phi\\ \text{விரி }\mathbf{A}&=\nabla.\mathbf{A}\\ \text{சுருட்டை }\mathbf{A}&=\nabla\times\mathbf{A}\end{aligned}\right\}\qquad(65)$$

என்னுந் தொடர்புகளாலே எளிதாக உணர்த்தப்படும். ∇ எனனுங் குறியீடு காவியட்சர கணிதத்தின் விதிகளுக்கேற்ப ஏனைய சார்புகளோடு சேர்த்து வழங்கப்படலாம்; அது பொருள் கொடுக்கப்படக்கூடிய அளவிற் புதுக் கோவைகளைத் தரும். இவ்வாறு ∇ ஐயும் $\mathbf{A}$ யையுஞ் சேர்க்க $\nabla\times\mathbf{A}$ யிற்கு ஒரு பொருள் உண்டு; ஆனால் $\mathbf{A}\times\nabla$ ஆனது தனனளவில் நிற்குமிடத்து அதற்குப் பொருள் இல்லை; அதற்குக் காரணம் செய் முதலோடு சேர்ந்திருக்குமிடத்து மாத்திரம் அது பொருள் கொள்ளுஞ் செயலியாயிருக்கும் என்பதே. இதனை மனத்தில் வைத்துக் கொண்டு காவி நுண்கணிதத்தின் சிக்கலான கோவைகளைச் சுருக்குதற்கு ∇ என்னுங் குறியீடு பெருநயம்பட வழங்கப்படலாம்.
உதாரணமாக,

$$\text{சுருட்டை (படி }\phi)\equiv\mathbf{0}\qquad(66)$$

என்னுந் தொடர்பை எடுத்து நோக்குக. இது 4.7 இன் எடுத்துக்காட்டு 1 இற் காட்டப்பட்டது. இதனைக் குறியீடு பற்றி $\nabla\times(\nabla\phi)$ என நாம எழுதினால், இது மறையும் என்பது மறைவதான $\nabla\times\nabla$ உள்ளமை கொண்டு அனுமானிக்கப்படலாம். அதுபோல, விரி (சுருட்டை $\mathbf{A}$) ஐ எடுத்துச் சிந்திக்க. இது $\nabla.(\nabla\times\mathbf{A})=0$ என எழுதப்படலாம். அதற்குக காரணம் ∇ ஆனது மும்மைப் பெருக்கத்தில் இரு முறை வருகின்றமையே எனின்,

$$\text{விரி (சுருட்டை }\mathbf{A})\equiv\mathbf{0}.\qquad(67)$$

∇ ஐப் பயணபடுத்திப் பின்வரும் முடிபுகளை நாம் நிறுவலாம் :

$$\text{விரி } (\phi\mathbf{A}) = \phi \text{ விரி } \mathbf{A} + (\text{படி } \phi).\mathbf{A} \tag{68}$$

$$\text{சுருட்டை } \phi\mathbf{A} = \phi \text{ சுருட்டை } \mathbf{A} + (\text{படி } \phi) \times \mathbf{A} \tag{69}$$

$$\text{விரி } (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B}.\text{சுருட்டை } \mathbf{A} - \mathbf{A}.\text{ சுருட்டை } \mathbf{B}. \tag{70}$$

4.10. லப்பிளாஸ் செயலி

செயலி

$$\nabla\cdot\nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{71}$$

ஆனது **லப்பிளாஸ் செயலி** எனப்படும ; அது ∇^2 என எழுதப்பட்டு " தெல் வர்ககம் " எனக் கூறபபடும் ; அது பௌதிகவியலின் பல்வேறு கிளைகளிற் பல முறையும் வரும.

$$\text{விரி } (\text{படி } \phi) = \nabla\cdot(\nabla\phi) = \nabla^2\phi.$$

$\nabla^2\mathbf{A}$ இற்கு ஒரு பொருளையும் நாம் கொடுததல் கூடும்.

$$\begin{aligned}\nabla^2\mathbf{A} &= \nabla^2 (A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}) \\ &= (\nabla^2 A_x)\,\mathbf{i} + (\nabla^2 A_y)\,\mathbf{j} + (\nabla^2 A_z)\,\mathbf{k}.\end{aligned} \tag{72}$$

உதாரணமாக, சுருட்டை (சுருட்டை $\mathbf{A}$) ஐச் சுருக்கும்போது நாம் பெறுவது

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla (\nabla . \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}.$$

அதாவது

$$\text{சுருட்டை } (\text{சுருட்டை } \mathbf{A}) = \text{படி விரி } \mathbf{A} - \nabla^2\mathbf{A}. \tag{73}$$

லப்பிளாஸ் சமணபாடு

$$\nabla^2\phi = 0 \tag{74}$$

எனபதும புவனசோவின சமனபாடு

$$\nabla^2\phi = -4\pi\rho \tag{75}$$

எனபதும் பௌதிகவியலின பல கிளைகளில் வரும் இரண்டு மிகப் பிரதானமான வகையீட்டுச் சமன்பாடுகள.

4.11. நிமிர்கோண வளைகோட்டாள் கூறுகள்

$x = x(u_1, u_2, u_3)$, $y = y(u_1, u_2, u_3)$, $z = z(u_1, u_2, u_3)$ ஆயும் $u_1 =$ மாறிலி, $u_2 =$ மாறிலி, $u_3 =$ மாறிலி எனனும் பரப்புக்கள் ஒனறுக்கொன்று செங் குத்தாயும் இருக்குமிடதது u_1, u_2, u_3 என்னும் பரமாணங்களை நாம் பல முறையும் வழஙகல நேரும.

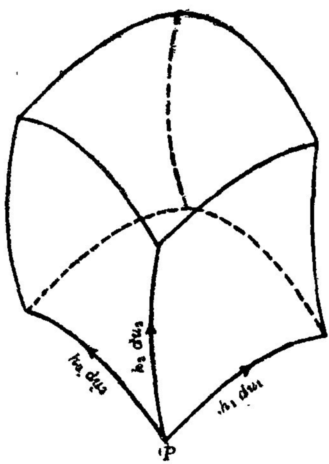
கோட்டு மூலகம ds இன் வாககியமாகிய ds^2 ஐ நாம் கணிக்கும்போது நாம் பெறுவது

$$\begin{aligned}ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &= h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2.\end{aligned} \tag{76}$$

இங்கு, h_1, h_2, h_3 என்பன u_1, u_2, u_3 என்பனவற்றின் சார்புகளாய் இருக்கலாம்.

இவ்வாள்கூறுகளில் படித்திறன், விரிகை, சுருட்டை என்பனவற்றைக் காண்பதற்குப் படம் 22 இற் காட்டிய இணைகரப்பரவையை எடுத்து நோக்குக.

A ஆனது u_1, u_2, u_3 என்பன கூடுதலுறும் மூன்று திசைகளிலும் $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, $\mathbf{A}_3$ என்னுங் கூறுகளோடு கூடிய ஒரு காவிப்புலம்.



படம் 22

(சுருட்டை $\mathbf{A})_2$ உம் (சுருடடை $\mathbf{A})_3$ உம் சக்கரவிடமாற்றுற் பெறப்பட அவற்றோடு கூடப் பின்வருவன காட்டப்படலாம்.

$$\text{படி}\ \phi=\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial u_1},\ \frac{1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial u_2},\ \frac{1}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial u_3}\right) \tag{77}$$

$$\text{விரி}\ \mathbf{A}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial u_1}(h_2h_3A_1)+\frac{\partial}{\partial u_2}(h_3h_1A_2)+\frac{\partial}{\partial u_3}(h_1h_2A_3)\right\} \tag{78}$$

$$(\text{சுருட்டை}\ \mathbf{A})_1=\frac{\partial}{h_2h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial u_2}(A_3h_3)-\frac{\partial}{\partial u_3}(A_2h_2)\right\}. \tag{79}$$

$$\nabla^2\phi=\frac{1}{h_1h_2h_3}\times\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\phi}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_3h_1}{h_2}\frac{\partial\phi}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\phi}{\partial u_3}\right)\right] \tag{80}$$

சிறப்பாக, r, θ, ψ எனனும் கோள முனைவாள்கூறுகளில்,

$$ds^2 = dr^2 + (r d\theta)^2 + (r \text{ சைன் } \theta \, d\psi)^2 \text{ ஆதலால்,}$$

நாம் $u_1 = r$, $u_2 = \theta$, $u_3 = \psi$,

$h_1 = 1$, $h_2 = r$, $h_3 = r$ சைன் θ.

என எடுத்துக் கோள முனைவாள்கூறுகளில் படி ϕ, விரி **A**, சுருட்டை **A**, $\nabla^2\phi$ என்பனவற்றைப் பெறுவதற்கு (77), (78), (79), (80) என்பனவற்றிற் பிரதியிடுவோம்.

ρ, ψ, z என்னும் உருளை முனைவாள்கூறுகளுக்கு

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\psi^2 + dz^2,$$

$$u_1 = \rho, \quad u_2 = \psi, \quad u_3 = 1,$$

$$h_1 = 1, \quad h_2 = \rho, \quad h_3 = 1.$$

பயிற்சி IV

1. (i) $\mathbf{A} = 2xz^2\mathbf{i} + (3y^2 - z)\mathbf{j} + (2zx^2 - y)\mathbf{k}$ ஆயும C எனபது (0, 0, 0) எனனும புளளியிலிருநது (1, 2, 2) எனனும புளளி வரைக்குமுளள

$$\mathbf{r} = t\mathbf{i} + (t + t^2)\mathbf{j} + (t + t^3)\mathbf{k}$$

எனனும் வளையியாயும் இருககுமிடததும்,

(ii) $\mathbf{A} = z\mathbf{i} + x\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ ஆயும் C எனபது $t = 0$ என்பதற்கு உரிய புள்ளியிலிருந்து $t = 2\pi$ எனனும் புள்ளிக்குமுள்ள

$$\mathbf{r} = \text{கோசை } t\mathbf{i} + \text{சைன் } t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

எனனும் வளையியின் பகுதியாயும் இருககுமிடத்தும்,

(iii) $\mathbf{A} = (x^3 - y^3)\mathbf{j}$ ஆயும

C எனபது (1, 0, 0) என்னும் புள்ளியிலிருநது (-1, 0, 0) என்னும் புள்ளி வரைக்குமுளள

$$y = 1 - x^2, z = 0$$

என்னும் அரைவட்டமாயும இருககுமிடததும்,

$$\int_C \mathbf{A}.d\mathbf{s}$$

எனனும் எண் கோட்டுத் தொகையீட்டின் பெறுமானததைக் கணிக்க.

2. பினவரும் வகைகளில, வளையி C யைச சுற்றி **A** யின சுற்றோட்டததைக் காண்க.

(i) $\mathbf{A} = y^3\mathbf{i}$; C எனபது $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$ என்னும வட்டம்,

(ii) $\mathbf{A} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$; C என்பது $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ எனனும் வட்டம்

[Cf Lond. S. 1944]

(iii) $\mathbf{A} = e^x$ சைன $y\mathbf{i} + e^x$ கோசை $y\mathbf{j}$; C என்பது, (0, 0), (1, 0) (1, $\pi/2$), (0, $\pi/2$) என்னும உச்சிகளையுடைய செவவகம்.

3. (i) **a** எனபது ஒரு மாறுக் காவியாயும் $\mathbf{r} = (x, y, z)$ ஆயும், $r = |\mathbf{r}|$ ஆயும் இருக்குமிடத்து படி $(\mathbf{a}.\mathbf{r})$, விரி $(r^n \mathbf{r})$ எனபனவறறின் பெறுமானங்களைக் கணிக்க.

(*ii*) நிலை $\phi(\mathbf{r})$ உள்ள ஓர் ஒன்றிப் பெறுமான எண்ணிச் சார்பும்

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \text{படி. } \phi\ (\mathbf{r})$$

ஆகுமாறுள்ள $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ என்னும் ஒரு காவிச் சார்புந் தரப்பட்டால், யாதுமொரு மூடிய வளையியைச் சுற்றியெடுக்கப்படும்

$$\oint \mathbf{A.dr}$$

என்னுந் தொகையீடு பூச்சியமாகுமெனக் காட்டுக.

(*iii*) எல்லா மூடிய வளையிகளுக்கும் $\oint \mathbf{B.dr}$ மறையுமாறு $\mathbf{B}\ (\mathbf{r})$ என்னும் ஒரு காவிச் சார்பு உண்டெனின், $B(r)$ என்பதைச் படித்திறனாய்க் கொண்ட ஓர் ஒன்றிப் பெறுமானவெண்ணிச்சார்பு உண்டெனக் காட்டுக.

4. $\mathbf{r}$ என்பது $(x,\ y,\ z)$ என்னும் நிலைக்காவி ; $\mathbf{a}$ என்பது ஒரு மாறுக்காவி ; $\mathbf{V}$ என்பது $\mathbf{V} = \mathbf{r}\ (\mathbf{a.r})$ என்பதால் வரையறுக்கப்படும்.

விரி $\mathbf{V} = 4\ (\mathbf{a.r})$ என்றும்,

சுருட்டை $\mathbf{V} = \mathbf{a} \times \mathbf{r}$ என்றுங் காட்டுக.

5. ϕ என்பது ஓர் எண்ணிப் புலமாயிருக்குமிடத்து $\mathbf{u} = -$ படி. ϕ என்னும் வடிவத்தில் உணர்த்தத்தக்க ஒரு காவிப்புலம் $\mathbf{u}$ இற்கு வேண்டிய, போதிய நிபந்தனை ஒன்றைக் கூறி நிறுவுக. பின்வரும் காவிப்புலங்கள் இவ்வடிவத்தில் உணர்த்தப்படல் கூடுமாவெனத் துணிக.

$$(i)\ (\mathbf{a.r})\ \mathbf{r} \quad (ii)\ (\mathbf{a.r})\ \mathbf{a} \quad (iii)\ r^{-1}\ [r^2\,\mathbf{a} + (\mathbf{a.r})\ \mathbf{r}]$$

$$(iv)\ r^{-1}\ [r^2\,\mathbf{a} - (\mathbf{a.r})\ \mathbf{r}]$$

இங்கு $\mathbf{a}$ ஆனது பூச்சியமல்லாத ஒரு மாறுக் காவி. ஏற்ற வகைகளில் தக்க எண்ணிப்புலங்கள் ϕ ஐக் காண்க.

[Camb. P. M. 1956]

6. $\mathbf{F}$ ஆனது ஒரு விசைப்புலத்தில் இடப்பட்ட ஒரு துணிக்கையின் மீதுள்ள விசை. அப்புலம் காப்புள்ளதெனின், அத்துணிக்கையைத் தந்த ஒரு புள்ளியிலிருந்து தந்த வேறொரு புள்ளிக்கு இயக்குவதிற் செய்யப்படும் வேலை அது செல்லும் வழியைச் சாராதெனின், சுருட்டை $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ எனக் காட்டுக. $\mathbf{k}$ ஆனது ஒரு மாறுக் காவியாயும் $\mathbf{r}$ ஆனது ஆரைக் காவியாயும் இருக்குமிடத்து

$$(i)\ \mathbf{F} = \frac{\mu \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}, \quad (ii)\ \mathbf{F} = \mathbf{k}\ (\mathbf{k.r})$$

ஆகும்போது இந்நிபந்தனை திருப்திப்படுமாவெனத் துணிக.

[Camb. N. S. 1953]

7. (*i*) $\mathbf{A} = (-2z^2x,\ 3y^2z,\ y^3 - 2zx^2)$ ஆகும்பொழுதும் [Camb. P. N. S. 1947]

(*ii*) $\mathbf{A} = \mathbf{k} f\ (r)$ ஆகும்பொழுதும்

(*iii*) $\mathbf{A} = \mathbf{r} f\ (r)$ ஆகும்பொழுதும் [Camb. N. S. 1957]

$\mathbf{A}$ ஒரு படித்திறன் காவியா என்று பரிசீலிக்க.

8. (*i*) $V =$ மாறிலி (*ii*) $V = f\ (r)\ \hat{\mathbf{r}}$

என்னும் புலங்கள் அமுத்தப் புலங்களெனக் காட்டுக.

(*a*) நியூற்றனீர்ப்பு (*b*) மின்னிலையியல் (*c*) நீரியக்கவியல் என்பனவற்றிலுள்ள இப்புல வகையொவ்வொன்றிற்கும் அப்புலங்களை விவரித்தும் அமுத்தச் சார்புகளைத் தந்தும் பௌதிக உதாரணங்கள் தருக.

$\hat{\mathbf{k}}$ என்னும் அலகுக் காவி மாறிலியாயிருக்க,

$$\mathbf{V} = \hat{\mathbf{k}} \wedge \hat{\mathbf{r}} / |\hat{\mathbf{k}} \wedge \hat{\mathbf{r}}|^3$$

எனபதாலே ஒரு காவிபபுலம தரபபட்டால், அப்புலம் வரையறுககபபடும புள்ளிகளில் ஓர் அழுத்தப் புலமாகாதெனறும், $\hat{\mathbf{k}}\wedge\hat{\mathbf{r}}=0$ எனனுங் கோட்டால் எலலையுறும் யாதுமோா அரைத் தளததின புளளிகள எலலாவறறையும் விலககுதலாற பெறப்படும பிரதேசத்தில் அது ஓா அழுததப் புலமாகுமென்றும் நிறுவுக.

[Lond. G. II. 1957

9.
$$\oint \mathbf{F}.d\mathbf{r} = \int \mathbf{n}.\ \text{சுருட்டை}\ \mathbf{F}\ dS$$

எனனும் ஸ்றருேககின தேறறததை நிறுவுக ; இங்கு, குறியீடுகள தம வழக்கமான பொருளையுடையன ; அபபொருளகள் கூறபபடல வேண்டும்.

$$\mathbf{F}=y\mathbf{i}-x\mathbf{j}+z\mathbf{k}\ \text{ஆயும், பரபபு}\ x^2+y^2+z^2=a^2\ (z>0)$$

எனனும அரைககோளமாயும இருககும்பொழுது தொகையீடுகளைக கணித்தலால அத தேறறத்தை உதாரணமூலம விளககுக.

இரணடு முடிவிலலாத ஒரசசுவட்டவுருளைகளுககிடையிலுள்ள பிரதேசம் முழுவதிலும் சுருட்டை $\mathbf{F}$ ஆனது மறைநதால, இபபிரதேசத்திறகுள முறறுய்க கிடைக்கும மூடிய வளையிகளைச்சுறறி $\mathbf{F}$ இன சுறறோட்டத்தைப பறறி என்ன உயததறியப்படலாம?

[Camb. N. S. 1956]

10. பினவரும் முடிபுகளைத தாபிகக :

$$\text{சுருட்டை}\ \phi\ \mathbf{A}=\phi\ \text{சுருட்டை}\ \mathbf{A}+\text{படி}\ \phi\times\mathbf{A},$$

$$\text{சுருட்டை}\ (\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{A}\ \text{விரி}\ \mathbf{B}-\mathbf{B}\ \text{விரி}\ \mathbf{A}+(\mathbf{B}.\ \text{படி})\ \mathbf{A}-(\mathbf{A}.\ \text{படி})\ \mathbf{B}.$$

$\mathbf{a}$ ஆனது ஒரு மாறுக காவியாயும, $\mathbf{r}=(x, y, z)$ என்பது ஒரு புள்ளியின நிலைக் காவியாயும, $r=|\mathbf{r}|$ ஆயும இருககுமிடதது,

$$\text{சுருட்டை}\left[\left(\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{r}}{r^n}\right)\right]$$

என்பதன பெறுமானததைக் கணிகக.

11. (*i*) பின்வரும் கிறீனின தேற்றத்தை நிறுவுக.

$$\iiint\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)dx\,dy\,dz=\iint(lu+mv+nw)\,dS.$$

இங்கு l, m, n எனபன, ஒரு மூடிய பரப்பு S மீதுளள ஒரு புள்ளியிலான வெளிநோககிய செவவனின திசைக் கோசைனகள.

(*ii*) S எனபது a ஆரை உடைய ஒரு கோளமாயின பினவருவனவறறைக காட்டுக.

$$(i)\ \iint lm\,dS=0 \qquad (ii)\ \iint l^2\,dS=\tfrac{4}{3}\pi a^3$$

(*iii*) சமபந்தபபட்ட குறியீடுகளின கருத்தை விளககி, பின்வரும தேற்றததின் நிறுவலைக குறித்துக் காட்டுக.

$$\int \text{விரி}\ \mathbf{A}\ dV=\int \mathbf{A}.\mathbf{n}\ dS$$

கோளம $x^2+y^2+z^2=a^2$ எனபதன பரப்புமீது எடுக்கப்படும பின்வரும தொகையீட்டின பெறுமானத்தைக காண்க.

$$\iint (x^3\, dy dz + y^3\, dz dx)$$

[Camb. P. N. S. 1942]

12. $\mathbf{r}\,(x,\ y,\ z)$ என்பது தந்த ஓர் உற்பத்தி O பற்றி ஒரு புள்ளியின் நிலைக்காவி. V என்பது $z=\frac{1}{2}a$ என்னுந் தளத்தால் வெட்டப்பட்ட $x^2+y^2+z^2=a^2$ என்னுங் கோளத்தின் சிறு பகுதியின் கனவளவு. எல்லையுறும் பரப்பைப் S ஆற் குறித்து, இரு பக்கங்களையும் நேர்முறைத் தொகையிடலால்

$$\int_V \text{விரி}\ \mathbf{r}\ dV = \int_S \mathbf{r}.d\mathbf{S}$$

என்பதை வாய்ப்புப் பார்க்க.

[Camb. P. N. S. 1945]

13. a ஆரையையுடைய S என்னும் பரப்பை உடைய ஒருகோளம் ஈர்ப்புள்ள சடப்பொருளின் ஒரு சீரான பரம்பலைக் கொண்டுள்ளது ; S இன் உள்ளும் புறமும் உள்ள ஒவ்வொரு புள்ளியிலுமுள்ள ஈர்ப்பழுத்தம் S இன் மையம்பற்றி அப்புள்ளியின் நிலைக்காவியின் $-(g/a)$ முறையாகும் ; இங்கு, g என்பது ஒரு மாறிலி. S இற்கு வெளியில் அப்புலத்தின் பாயத்தை (i) S மீது பரப்புத் தொகையீடாகவும் (ii) S இற்கு உட்பக்க முழுவதிலும் ஒரு கனவளவுத் தொகையீடாகவும் கணிக்க ; இரண்டு விடைகளும் சமமோ என வாய்ப்புப் பார்க்க.

[Camb. N. S. 1948]

14. ஒரு பரப்புத் தொகையீட்டையும் கனவளவுத் தொகையீட்டையும் தொடர்புபடுத்தும் விரிகைத் தேற்றத்தைக் கூறுக. ρ உம் $\mathbf{V}$ உம் முறையே ஓர் இயங்கும் திரவத்திலுள்ள ஒரு புள்ளியிலான அடர்த்தியும் வேகமும் ஆயின், விரி $(\rho\mathbf{V})+\partial\rho/\partial t=0$ என்று காட்டி அத்தேற்றத்தின் பிரயோகத்தை விளக்குக. உற்பத்தியில் மையமும் ஆரை a உம் கொண்ட ஒரு கோளத்தின் பரப்பைப் பரப்பாக எடுத்து, பின்வரும் காவிகளுக்குப் பரப்புத் தொகையீடும் கனவளவுத் தொகையீடும் சமமோ எனப் பார்க்க.

(i) $\mathbf{F}=\mu\mathbf{r}$, இங்கு $\mathbf{r}$ ஆரைக் காவி ; μ ஒரு மாறிலி

(ii) $\mathbf{G}=$ படி. ϕ, இங்கு $\phi=x^4+y^4+z^4$ [Camb. N. S. 1954]

15. (i) விரி (ϕ படி. ψ) $=\phi\nabla^2\psi=$ படி ϕ. படி ψ

எனக் காட்டுக.

இதனைக்கொண்டோ பிறிதொரு முறையாலோ, ஓர் எளிய மூடிய பரப்பு S இன் மீதாயினும் உள்ளேயாயினும் $\nabla^2\phi=0$ எனின்,

$$\iint \phi\ \text{படி}\ \phi.\mathbf{n}\ dS \geqslant 0$$

எனக் காட்டுக ; இங்கு, தொகையீடு பரப்பு S இன் மீது எடுக்கப்படும் ; $\mathbf{n}$ ஆனது பரப்புமூலகம் dS இற்கு வெளிமுகச் செவ்வனின் திசையைச் சுட்டும் ஓர் அலகுக் காவி.

(ii) விரி $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\mathbf{v}$. சுருட்டை $\mathbf{u}-\mathbf{u}$. சுருட்டை $\mathbf{v}$

எனக் காட்டுக.

[Camb. P. N. S. 1947]

16. $\mathbf{F}$, f என்பன புள்ளிச் சார்புகளெனின், f இன் ஒரு மட்டமான பரப்பிற்குச் செவ்வனுயும் தொடலியாயுமுள்ள $\mathbf{F}$ இன் கூறுகள்

$$\frac{(\mathbf{F}.\nabla f)\nabla f}{(\nabla f)^2},\qquad \frac{\nabla f\times(\mathbf{F}\times\nabla f)}{(\nabla f)^2}$$

என்பன என நிறுவுக.

[Camb. P. M. 1951]

17. நிலைபற்றி ஒரு காவிச்சாபு $\mathbf{H}$ ஆனது பின்வருமாறு வரையறுக்கப்படும் :

$$\mathbf{H} = \text{சுருட்டை } \mathbf{A}, \; \mathbf{A} = \mathbf{k} \text{ மட } r \; ;$$

இங்கு, r ஆனது ஒரு நிலையான நேர்கோட்டிலிருந்து எடுக்கப்படும் தூரம் ; $\mathbf{k}$ ஆனது அக் கோட்டுக்குச் சமாந்தரமான ஒரு நிலையான காவி. இக்கோட்டில் இல்லாத யாதுமொரு புள்ளியில்

விரி $\mathbf{H} = 0$ என்றும், சுருட்டை $\mathbf{H} = \mathbf{0}$ என்றும் நிறுவுக.

[Camb. N. S. 1946]

18 (i) சுருட்டை $\{ f(r)\, \mathbf{r} \} = \mathbf{0}$

என நிறுவுக.

விரி $\{ f(r)\, \mathbf{r} \} = 0$ எனின், $f(r)$ என்னுஞ் சார்பின் வடிவத்தைக் காண்க.

(ii) S ஆனது ஓர் எளிய மூடிய பரப்பாயும், $\mathbf{r}$ ஆனது O என்னும் ஓர் உற்பத்திபற்றி அதன் பரப்பின் யாதுமொரு புள்ளி P யின் நிலைக் காவியாயும் இருந்தால்

$$\int_S r^2 (\mathbf{r}.\mathbf{n})\, dS = \tfrac{5}{2} (A + B + C)$$

எனக் காட்டுக ; இங்கு, $\mathbf{n}$ ஆனது P யில் வெளிமுகச் செவ்வன் வழியே உள்ள அலகுக்காவி ; A, B, C என்பன S ஆல் எல்லையுற்ற அலகடர்த்தித் திண்மம் ஒன்றின் O இல் எடுக்கப்படுஞ் சடத்துவத் தலைமைத் திருப்பங்கள்

[Lond. G. II. 1959]

19 நிறுவலைத் தராது ஸ்ரோக்கின் தேற்றத்தையும் விரித் தேற்றத்தையும் (கவுசின் தொகையீட்டுத் தேற்றம்) கூறுக.

$\mathbf{A} =$ சுருட்டை $\mathbf{B}$ ஆயும், $\mathbf{B} =$ சுருட்டை $\mathbf{C}$ ஆயும் இருக்க, $\mathbf{C}$ என்பது ஒரு தக்க காவிப் புலமெனின்,

$$\int_v \mathbf{B}^2\, dv = \int_S (\mathbf{C} \times \mathbf{B}).\, \mathbf{n}\, dS + \int_v \mathbf{C}.\mathbf{A}\, dv$$

எனக் காட்டுக ; இங்கு, $\mathbf{n}$ ஆனது ஒரு கனவளவு v ஐ அடைக்கும் ஒரு பரப்பு S இற்கு வெளிமுகச் செவ்வன்

u, $\mathbf{H}$ என்பன தக்க எண்ணிப் புலமுங் காவிப் புலமுமாயின்,

$$\text{சுருட்டை } (u\mathbf{H}) = \nabla u \times \mathbf{H} + u \text{ சுருட்டை } \mathbf{H}$$

என நிறுவுக.

இதனைக்கொண்டோ பிறிதொரு முறையாலோ

$$\int_\Sigma u\mathbf{n}. \text{ சுருட்டை } \mathbf{H} dS = \int_C u\mathbf{H}.d\mathbf{s} - \int_\Sigma (\nabla u \times \mathbf{H})\, .\mathbf{n} dS$$

எனக் காட்டுக ; இங்கு, $\mathbf{n}$ ஆனது மூடிய வளையி C ஐ எல்லையாகவுள்ள ஒரு பரப்பு Σ இற்கு வெளிமுகச் செவ்வன்

$\mathbf{H} = \nabla w$ எனப் பிரதியிடலாலோ வேறொரு முறையாலோ

$$\int_C u \nabla w.d\mathbf{s} = - \int_C w \nabla u.d\mathbf{s}$$

எனக் காட்டுக ; இங்கு, w ஆனது வேறோர் எண்ணிப் புலம்

[Lond. G. II. 1960]

அதிகாரம் 5

சில பிரயோகங்கள்

5.1. விசைத்தொகுதிகளின் சமானத்தன்மை

இரண்டு விசைத் தொகுதிகள் ஒரு விறைப்பான பொருளின் மீது தனித்தனி தாக்குமிடத்து ஒவ்வொரு சந்தர்ப்பத்திலும் ஒரே இயக்கத்தை ஆக்குமெனின், அவ்விரு விசைத் தொகுதிகளுஞ் **சமானமானவை** எனப்படும். $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$ என்னும் நிலைக் காவிகளையுடைய புள்ளிகளில் முறையே $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ என்னும விசைகளினலே தாக்கப்படும் ஒரு விறைப்பான பொருளின இயக்கச் சமன்பாடு

$$\dot{\mathbf{p}} = \Sigma \mathbf{F}_i$$

$$\dot{\mathbf{h}} = \Sigma \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

என்னும் வடிவத்தில் உணர்த்தப்படலாம் ; இங்கு $\mathbf{p}$ என்பது ஒரு நிலையான உற்பத்தி O பற்றி எடுக்கப்படும் அப்பொருளின நேர்கோட்டு உந்தம். $\mathbf{h}$ என்பது அதன கோண உந்தம்.

ஆயின்,

(அ) $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$ எனபனவற்றிலே தாகக்கும் $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$.

(ஆ) $\mathbf{r}'_1, \mathbf{r}'_2, \ldots, \mathbf{r}'_m$ என்பனவற்றிலே தாக்கும $\mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2, \ldots, \mathbf{F}'_m$.

என்னும் இரண்டு விசைத் தொகுதிகளின் சமானத்தன்மை நிபந்தனைகள

$$\text{(i)} \quad \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{F}'_j \tag{1}$$

$$\text{(ii)} \quad \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{r}'_j \times \mathbf{F}'_j. \tag{2}$$

இரு விசைத் தொகுதிகளின் சமானத்தன்மை நிபந்தனை வேறொரு வகையாகவும் உணர்த்தப்படலாம். ஒரு விசைத் தொகுதியும் மற்றை விசைத் தொகுதியின புறமாற்றும் சேர்ந்து ஒரு விறைப்பான பொருளிலே தாக்கி அப்பொருளைச் சமநிலையடையச் செய்யும் எனபதே அந்நிபந்தனை.

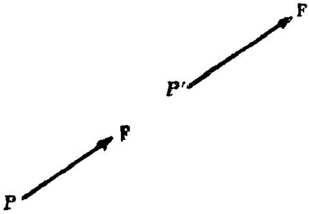
சிறப்பு வகையாக,

(*a*) $\mathbf{r}$ என்னும் நிலைக காவியையுடைய P எனனும் ஒரு புள்ளியிலே தாக்கும் $\mathbf{F}$ எனனும் ஒரு விசையையும்

(*b*) $\mathbf{r}'$ என்னும் நிலைக் காவியையுடைய P' என்னும் ஒரு புள்ளியிலே தாக்கும் $\mathbf{F}$ என்னும் ஒரு விசையையும

எடுத்து நோக்குவோம் ; இங்கு, $\overrightarrow{PP'}$ என்பது $\mathbf{F}$ இன் திசையில் உள்ளது.

இவ்விரு விசைத தொகுதிகளின சமானத்தன்மை நிபந்தனைகளாகிய (1), (2) என்பனவற்றுள் (1) ஆனது தானுகவே திருப்திப்படுத்லேயும் (2) ஆனது $\mathbf{r}\times\mathbf{F}=\mathbf{r}'\times\mathbf{F}$, அதாவது, $(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\times\mathbf{F}=\mathbf{0}$ என்னுஞ் சமன்



படம் 1a

பாட்டைத் தருதலேயும் $\mathbf{r}-\mathbf{r}'$ உம் $\mathbf{F}$ உம் ஒரே திசையில் இருப்பதால் இச்சமனபாடு திருபதிபபடுதலேயும் நாம் காண்கின்ருேம். இதனுல், P யில் $\mathbf{F}$ உம் P' இல $\mathbf{F}$ உம சமானமானவை எனக் காண்கின்ருேம். இது ஒரு விசையின ஊடுகடத்தப்படு தனமைத் தத்துவமாகும். அதாவது, ஒரு நோகோட்டிலே தாக்கும $\mathbf{F}$ என்னும் ஒரு விசை அக்கோட்டில் யாதுமொரு புள்ளியிலே தாககுவதாகக் கொள்ளபபடலாம்.

$\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ எனனும் இரணடு விசைகள் ஒன்றையொன்று வெட்டுங் கோடு களின வழியே தாக்கினுல், அவை அவ்வெட்டுப புள்ளியிலே தாக்கும் $\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2$ என்னும் விசைக்குச் சமானமானவை. ஆயின், ஒன்றையொன்று வெட்டும இரண்டு விசைகளின விளேயுள **விசையிணைகரத்தாலே** தரப படுதலைக காணகினருேம்.

தொகுதிச சமானத்தனமை நிபநதனைகளாகிய (1), (2) என்பவை பின்வருவனவற்றில் (a), (b) என்னுந் தொகுதிகளாலே திருப்திப் படுதலே வாய்ப்புப பார்ககலாம் :

(a) $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ எனபவை சமாந்தரமாயிருக்குமிடதது $\mathbf{r}_1$, இல $\mathbf{F}_1$ உம் $\mathbf{r}_2$ இல் $\mathbf{F}_2$ உம.

(b) $\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2\neq\mathbf{0}$ ஆயிருக்குமிடதது

$$\mathbf{r}=\frac{F_1\mathbf{r}_1+F_2\mathbf{r}_2}{F_1+F_2}$$

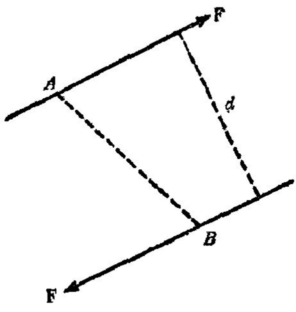
என்னும் புள்ளியிலே தாக்கும், ($\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ எனபனவறறிற்குச் சமாந்தரமான) $\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2$ எனனுமவிசை.

சமமும எதிருமலலாத இரணடு சமாந்தரமான விசைகளின் விளேயுள் ஒரு மூனருஞ் சமாநதரமான விசையாகும் என்பதை இது காட்டும்.

விளையுள் விசையின் தாக்கக்கோடு $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ என்னும் புள்ளிகளில் முறையே வைக்கப்படும் $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$ என்பனவற்றிற்கு விகித சமமான திணிவுகளின் மையப்போலிக் கூடாகச் செல்லும்.

சமாந்தரமான கோடுகளின் வழியே தாக்கும் $\mathbf{F}$, $-\mathbf{F}$ என்னுஞ் சமமும எதிருமான விசைகள் ஓர் **இணையை** ஆககும். ஓர் இணையை ஆககி நிற்கும் விசைச் சோடியின் யாதுமொரு புளளி பற்றி எடுக்கபபடுந் திருப்பம் அத்திருப்பம் எடுக்கப்படும் புள்ளியைச் சாராது என்பது அவ்வி ணையின் உடைமையாகும். $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ என்பன முறையே $\mathbf{F}$, $-\mathbf{F}$ என்பன வறறின் பிரயோகப் புள்ளிகளின நிலைக் காவிகளெனின, தன்நிலைக்காவி $\mathbf{p}$ ஆயுள்ள P என்னும் யாதுமொரு புள்ளி பற்றி எடுக்கப்படுங் காவித் திருப்பம்

$$\mathbf{G} = (\mathbf{a}-\mathbf{p}) \times \mathbf{F} + (\mathbf{b}-\mathbf{p}) \times (-\mathbf{F})$$
$$= (\mathbf{a}-\mathbf{b}) \times \mathbf{F},$$



படம் 1b

இது $\mathbf{G}$ ஆனது $\mathbf{p}$ ஐச் சாராதெனக் காட்டும். $\mathbf{G}$ இன் திசை அவ் விசைகளின் தளத்திற்குச் செவ்வன் ; அதன பருமன்

$$|\mathbf{G}| = \mathbf{F}\,.\,AB.\ \text{சைன}\ \theta = \mathbf{F}d.$$

$\mathbf{G}$ என்பது அவ்விணையின திருப்பம் எனப்படும்.

$\mathbf{G}$, $\mathbf{G}'$ எனனுந் திருப்பங்களையுடைய இரண்டு இணைகளுள் ஒன்று சமாந்தரக் கோட்டுத் தொகுதி ஒன்றின் வழியே தாக்கும் $\mathbf{F}$, $-\mathbf{F}$ என் னும் விசைகளால் ஆக்கபபட்டும் மற்றையது சமாந்தரக கோட்டுத் தொகுதி வேறொன்றின வழியே தாக்கும் $\mathbf{F}'$, $-\mathbf{F}'$ என்னும் விசைகளால் ஆக்கப் பட்டுமிருக்க அவ்விணைகளின காவித்திருப்பங்கள் சமமெனின், அதாவது, $\mathbf{G} = \mathbf{G}'$ எனின், அவ்விணைகள் சமானமானவை. $\mathbf{G}$, $\mathbf{G}'$ என்பன ஒரே திசையுடையவையாதலால், இரண்டு விசைத் தொகுதிகளும் ஒரே தளத்தி

லாதல சமாந்தர தளததிலாதல் கிடக்கும். ஒவ்வொரு விசைச் சோடியின் பருமன்களுந் தூரமும்

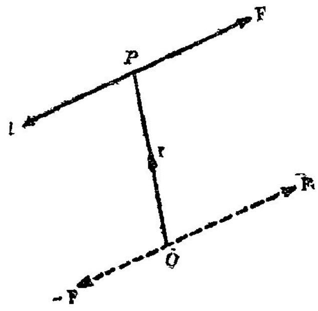
$$|\mathbf{G}| = Fd = F'd' = |\mathbf{G}'|$$

ஆகுமாறு இருக்கும். ஓர் இணையை அதன் காவித்திருப்பததாற் குறித்துக் கூறல் போதியதாகும் ; அதனை ஆக்குஞ் சிறப்பு விசைச் சோடியைச் சுட்டிக் காட்ட வேணடியதில்லை.

G, **G′** என்னுந் திருப்பங்களையுடைய இரண்டு இணைகளின் கூட்டுத் தொகை $\mathbf{G}+\mathbf{G}'$ என்னுந திருப்பததையுடைய ஒரு தனி இணை. விளையுள் இணையின் திருப்பம் அவ்விரு இணைகளின் திருப்பங்களின் காவிக் கூட்டுத் தொகையாகும்.

இனி, தந்த ஒரு கோடு l இன் வழியே தாக்கும் ஒரு விசையானது தக்க ஓர் இணையைப புகுத்துதலால், தந்த ஒரு புள்ளி O இலே தாக்குமாறு தனக்குச் சமாநதரமாய் இடமாற்றப்படலாம் என்னுந் தேற்றத்தை நிறுவுவோம்.

படத்திற் காட்டியவாறு **F**, −**F** என்னும் இரண்டு சமமும் எதிருமான விசைகளை O விற புகுததுக. இவ்விசைகள ஒனறையொன்று சமநிலைப் படுத்தும் ; அத்தொகுதியை மாற்ரு. l இன் வழியே தாக்கும் **F**



படம் 2

என்னுந் தந்த விசையும் O வில் தாக்கும் −**F** என்னும் விசையும் சமமும் எதிருமானவை ; அவை சமாந்தரக் கோடுகளின் வழியே தாக்கும் ; **G** எனனும் ஓர் இணையை ஆக்கும்.

ஆதலால், தந்த தொகுதியானது **G** என்னும் இணையோடு கூடிய O விலே தாக்கும் **F** என்னும விசைக்குச் சமானமானது. **G** இன் திருப்பம் தந்தவிசை **F** இன் O பற்றி எடுக்கப்படும் திருப்பமாகும், அதாவது $\mathbf{G} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ ஆகும் என்பது அறியப்படலாம் ; இங்கு, **r** ஆனது l இன்மீது

ஒரு புள்ளி P யின O பற்றிய நிலைக் காவி. இணை $\mathbf{G}$ ஐப புகுத்துதலால, l இன வழியே தாக்கும விசை $\mathbf{F}$ ஆனது தநத புள்ளி O விலே தாக்குமாறு தனககுச் சமாந்தரமாய இடம் பெயாக்கப்பட்டுளளது.

5.2. புவன்சோவின் மையவச்சு

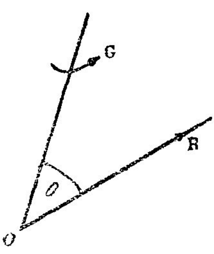
$P_1, P_2, \ldots, P_n$ எனனும புள்ளிகளிலே தாககும $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ எனனும் விசைகளின ஒரு தொகுதியின பொது வகையை எடுத்துச் சிந்தித்து அவவிசைகளை ஓர் எளிய சமானமாயுளள தொகுதியாய் ஒடுகக நாடுவோம்.

ஓர் எதேசசைப புள்ளியானது உற்பத்தி O ஆகத தேரப்படும். O பற்றிய $P_1, P_2, \ldots, P_n$ எனபனவற்றின நிலைககாவிகள $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$ என்பனவாகுக. $\mathbf{F}_j$ என்னும் ஒவ்வொரு விசையும, $\mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_j$, $j=1, \ldots, n$ என்னுந் திருப்பமுளள ஓா இணையைப் புகுத்துதலால் O விற் கூடாகத தாக்குமாறு தனககுச் சமாநதரமாயப் பெயர்க்கப்படலாம். எனின, O விலுளள விசைகள் O விலே தாககும ஒரு தனி விசை $\mathbf{R}$ ஆகக் கூட்டுப்படலாம ; அதுபோல, அவ்விணைகளும் ஒரு தனி இணை $\mathbf{G}$ ஆகக் கூட்டுப்படலாம் ; இங்கு,

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n,$$

$$\mathbf{G} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \ldots + \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_n.$$

இவ்வாறு அத்தொகுதி O விலே தாக்கும விசை $\mathbf{R}$ ஆயும் ஓா இணை $\mathbf{G}$ ஆயும் ஒடுக்கப்படும்.



படம் 3

$\mathbf{R}$ ஆனது $\mathbf{F}_1, \ldots \mathbf{F}_n$ எனனுந தநத காவிகளின காவிக கூட்டுத தொகை ; அது புள்ளி O உடன மாறுது. ஆனால், இணை $\mathbf{G}$ ஆனது தநத விசைகளின O பற்றி எடுககப்படுந் திருப்பத்தின் கூட்டுத் தொகை யாயிருத்தலால தோநதெடுககபபட்ட புள்ளி O ஐச் சாராது.

$\mathbf{R}=\mathbf{0}$ ஆயும் $\mathbf{G}=\mathbf{0}$ ஆயும் நோநதால, அவ்விசைத் தொகுதி சமநிலை யில இருக்கும். $\mathbf{R}=\mathbf{0}$ ஆயும $\mathbf{G}\neq\mathbf{0}$ ஆயும இருந்தால், அததொகுதி

இணை **G** யிற்குச் சமானமாகும். $\mathbf{G}=\mathbf{0}$ ஆயும் $\mathbf{R}\neq\mathbf{0}$ ஆயும் இருந்தால், அத்தொகுதி O விலுள்ள விசை **R** இற்குச் சமானமாகும்.

R, G எனபன மறையாவெனின், பொதுவாக அவை ஒரே திசை நீளத்திறகு உளளவையாகா. அவறறிறகிடையிலுள்ள கோணம் θ ஆனது

$$\text{கோசை } \theta=\frac{\mathbf{R}\cdot\mathbf{G}}{RG}$$

என்பதாலே தரப்படும். எடுத்து நோக்கவேண்டிய ஒரு பிரச்சினை யானது இத்தொகுதியை இனனுஞ் சுருக்கல் முடியுமோ என்பதே. உதாரணமாக, அத்தொகுதி ஒரு புளளி O' இலே தாக்குமாறு ஒடுக்கப் படுமிடத்து, விளையுள இணை $\mathbf{G}'$ ஆனது மறையும் வண்ணம அப்புள்ளி O' ஐக காணல முடியுமா? பினனா எடுத்துச் சிந்திக்கபபடும் ஒருசிறப்பு வகையைத தவிர இது பொதுவாக முடியாத காரியம் எனபது காணப்படும $\mathbf{G}'$, $\mathbf{R}'$ எனபன ஒரே திசையில் இருக்குமாறு O' ஐக் காணலே அடுததுச் செய்யககூடிய சுருக்கம். $\overrightarrow{OO'}=\mathbf{r}$ எனின, $\mathbf{R}'=\mathbf{R}$; O' பற்றி எடுக்கபபடும அததொகுதியின திருப்பம் $\mathbf{G}'$ ஆனது $\mathbf{G}$ இன் திருப்பத்தையும் O இல தாக்கும் **R** இன் O' பறறி எடுக்கப்படுந் திருப பத்தையுங் கூட்ட வருங கூட்டுத்தொகையாகும ; எனின,

$$\mathbf{G}'=\mathbf{G}+(-\mathbf{r})\times\mathbf{R}.$$

$\mathbf{G}'$, **R** எனபன ஒரே திசையில் இருக்குமாறு O' இருநதால், யாதோ ஓர் எண் p இறகு

$$\mathbf{G}-\mathbf{r}\times\mathbf{R}=p\mathbf{R}. \qquad (3)$$

R ஒடு எண்ணிப் பெருக்கத்தை எடுக்க,

$$\mathbf{G}\cdot\mathbf{R}=p\mathbf{R}^2.$$

எனின

$$p=(\mathbf{G}\cdot\mathbf{R})/\mathbf{R}^2.$$

$\mathbf{G}'$, **R** எனபன ஒரே திசையையுடைய புள்ளிகள O' இன் நிலைக்காவி **r** ஆனது

$$\mathbf{G}-\mathbf{r}\times\mathbf{R}=\frac{\mathbf{G}\cdot\mathbf{R}}{\mathbf{R}^2}\mathbf{R} \qquad (4)$$

எனபதைத் திருபதிப்படுத்தும.

இவை ஒரு நேர் கோட்டின சமனபாடாகும். **R** ஒடு காவிப பெருக்கத்தை எடுக்க,

$$\mathbf{R}\times\mathbf{G}-\mathbf{R}^2\mathbf{r}+(\mathbf{R}\cdot\mathbf{r})\mathbf{R}=\mathbf{0}. \qquad (5)$$

என வரும்.

$$\mathbf{r}=\frac{\mathbf{R}\times\mathbf{G}}{\mathbf{R}^2} \qquad (6)$$

என்பது சமன்பாடுகள் (5) ஐத் திருப்திப்படுத்துதலைக் காண்போம்; ஆகவே, அது அக்கோட்டின் மீது ஒரு புள்ளியின் நிலைக்காவியாகும். (4) இன் பொதுத்தீர்வு

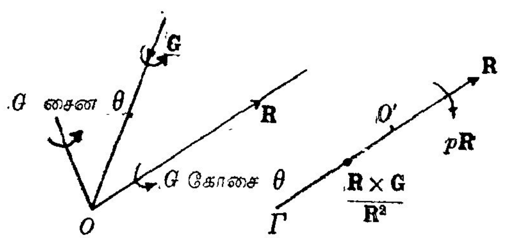
$$\mathbf{r}=\frac{\mathbf{R}\times\mathbf{G}}{\mathbf{R}^2}+\lambda\mathbf{R}. \tag{7}$$

இங்கு, λ என்பது ஓர் எதேச்சை எண்ணிப் பரமானமாகும்.

G′, **R** என்பன ஒரே திசையிலுள்ள புள்ளிகள் O' இன் ஒரு கோடு Γ ஐச் சமன்பாடுகள் (7) தரும். இக்கோட்டின திசை **R** இன திசையோடு ஒன்றுரும். O' ஆனது இக்கோட்டிற் கிடந்தால், அவ்விசைத் தொகுதி Γ இன வழியே தாக்கும ஒரு விசை **R** ஒடும் அதே திசையில $p\mathbf{R}$ என்னுந் திருப்பமுள்ள ஓர் இணைக்குஞ் சமானமானதாகும். ஒரு கோட்டின் வழியே தாக்கும் ஒரு விசையையும் அதே கோடுபற்றிய இணையையுங்கொண்ட அத்தகைத் தொகுதி ஒன்று ஒரு **முறுக்கி** எனப் படும். Γ என்னும் அக்கோடு **புவன்சோவின் மையவச்சு** எனப்படும். அவ்விசைக்கு அவ்விணையின் விகிதம அம்முறுக்கியின் **புரியிடை** எனப்படும். மேலுள்ளதில், புரியிடை $p=\mathbf{G}\,.\,\mathbf{R}/\mathbf{R}^2$. எண்ணிகளில், $\mathbf{r}=(x,y,z)$ ஆயும, $\mathbf{R}=(X,\ Y,\ Z)$ ஆயும், $\mathbf{G}=(L,\ M,\ N)$ ஆயும இருந்தால், மையவச்சின சமன்பாடுகள்

$$\frac{L-yZ+zY}{X}=\frac{M-zX+xZ}{Y}=\frac{N-xY+yX}{Z}$$

$$=\frac{LX+MY+NZ}{X^2+Y^2+Z^2}=p. \tag{8}$$



படம் 4

படத்தில், இணை **G** ஆனது G கோசை θ, G சைன் θ என்பனவாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது. இணை G சைன் θ இன் விளைவு O விலுள்ள விசை **R** ஐத் தனக்குச் சமாந்தரமாய் G சைன θ/R எனனுந் தூரத்திற்கூடாக இடம் பெயர்த்து அதனுல முறுக்கியின் அச்சைத் தருதலே. இணை G கோசை θ ஆனது முறுக்கியின் அச்சுப்பற்றிய இணை $p\mathbf{R}$ இற்குச் சமான மானது.

மாற்றமிலிகள்

காவி **R** ஆனது O வின் தேர்வைச் சாராது. இனனும் **R** இன் பருமன் Ox, Oy, Oz என்னும் ஆள்கூற்றச்சுக்களின சிறப்புத்திசைகளின் தேர்வைச் சாராது. எனின, $\mathbf{R}^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$ எனபது அவ்வச்சுக்கள் பற்றிய ஒரு மாறறமிலி.

இனி,

$$\mathbf{G}'.\mathbf{R}' = \mathbf{G}.\mathbf{R}$$

எனபதைக் காண்கினறேம்; எனின், $\mathbf{G}.\mathbf{R} = LX + MY + NZ$ எனபதும் அத்தொகுதியின் ஒரு மாற்றமிலி.

$$\mathbf{R}^2 = X^2 + Y^2 + Z^2, \quad \mathbf{R}.\mathbf{G} = LX + MY + NZ$$

எனனும் மாற்றமிலிகள் இரண்டும் அத்தொகுதியின் உடைமைகள் சில வறறை ஆராய்ந்து கூறுகையிற் பயன்படும்.

$\mathbf{G}.\mathbf{R} = \mathbf{0}$ ஆகுமாறு **G, R** என்பன இருக்கும்வகையில், $\mathbf{G}' = \mathbf{0}$ ஆகுமாறு O' ஐத் தோந்தெடுததல முடியும; அப்பொழுது அத்தொகுதி ஒரு தனி விசைக்குச் சமானமாகும்; இவ்வகையில் **R, G** எனபன செங்குத்தாகும்; **G** இன விளைவு விசை **R** ஐத தனக்குச சமாந்தரமாகப் பெயர்தத லேயாகும. எனின, தாக்கக் கோட்டுச சமனபாடு

$$\mathbf{G} - \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{0}.$$

இது வடிவு (7) இலும் உணர்த்தப்படலாம்.

ஒருதள விசைத் தொகுதியொனறு $\mathbf{G}.\mathbf{R} = 0$ எனனும் இவ்வுடைமையைத் திருப்திப்படுததும் அவ்விசைகளின் தளத்தில் Ox, Oy என்னும் அச்சுக்களையும் அததளத்திறகுச் செவ்வனய் Oz என்னும் அச்சையும் நாம் எடுத்தால்,

$$\mathbf{R} = (X,\ Y,\ 0),\ \mathbf{G} = (0,\ 0,\ G)$$

$\mathbf{r} = (x, y, 0)$ என்பதனேடு விளையுளின் தாக்கக் கோட்டின் சமன்பாடு

$$G - xY + yX = 0.$$

எடுத்துக்காட்டு 1. P, Q என்னும் இரண்டு விசைகள் முறையே

$y = x$ தான் α, $z = c$; $y = -x$ தான் α, $z = -c$ என்னும் நேர்கோடுகளின் வழியே தாக்குகின்றன. மையவச்சின் சமன்பாடுகளையும் சமானமான முறுக்கியின் புரியிடையையும் காண்க.

P, Q, என்பன பருமனில் மாற மையவச்சு

$$z\,(x^2 + y^2) = 2\,cxy \text{ கோசீ } 2\,\alpha$$

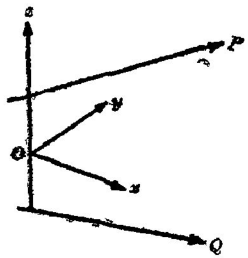
என்னும் பரப்பிற் கிடக்குமெனக் காட்டுக.

அக்கோடுகளின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{x}{\text{கோசை } \alpha}=\frac{y}{\text{சைன் } \alpha}=\frac{z-c}{0}; \quad \frac{x}{\text{கோசை } \alpha}=\frac{y}{-\text{சைன் } \alpha}=\frac{z+c}{0}$$

$$(X, Y, Z)=\Sigma \mathbf{F}_i, \quad (L, M, N)=\mathbf{G}=\Sigma \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$$

எனனும் வடிவத்தில் எழுதப்படலாம்.



படம் 5

எனின,

$$X=(P+Q) \text{ கோசை } \alpha, \quad Y=(P-Q) \text{ சைன் } \alpha, \quad Z=0$$

$$L=-cP \text{ சைன } \alpha-cQ \text{ சைன் } \alpha, \; M=cP \text{ கோசை } \alpha-cQ \text{ கோசை } \alpha, \; N=0.$$

$$p=\frac{LX+MY+NZ}{X^2+Y^2+Z^2}$$

$$=\frac{-c \text{ சைன் } \alpha \text{ கோசை } \alpha\,(P+Q)^2+c \text{ சைன் } \alpha \text{ கோசை } \alpha\,(P-Q)^2}{(P+Q)^2 \text{ கோசை}^2 \alpha+(P-Q)^2 \text{ சைன}^2 \alpha}$$

$$=\frac{-2cPQ \text{ சைன் } 2\alpha}{P^2+Q^2+2PQ \text{ கோசை } 2\alpha}.$$

மையவச்சின் சமன்பாடுகள்

$$\frac{-c\,(P+Q) \text{ சைன் } \alpha-z\,(P-Q) \text{ சைன் } \alpha}{(P+Q) \text{ கோசை } \alpha}$$

$$=\frac{c\,(P-Q) \text{ கோசை } \alpha-z\,(P+Q) \text{ கோசை } \alpha}{(P-Q) \text{ சைன் } \alpha}$$

$$=\frac{-x\,(P-Q) \text{ சைன் } \alpha+y\,(P+Q) \text{ கோசை } \alpha}{0}.$$

இவை

$$z\left(\frac{P-Q}{P+Q}\text{ தான் }\alpha+\frac{P+Q}{P-Q}\text{ கோதா }\alpha\right)=c\,(\text{தான் }\alpha+\text{ கோதா }\alpha),$$

$$y=\frac{P-Q}{P+Q}x\text{ தான் }\alpha$$

எனபனவாக ஒடுங்கும்.

$(P-Q)/(P+Q)$ எனபதை நீகக நாம் பெறுவது

$$z\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)=c\,(\text{தான் }\alpha+\text{ கோதா }\alpha)$$

அதாவது,

$$(x^2+y^2)\,z=2cxy\text{ கோசீ }2\alpha.$$

எனின், மையவச்சு இபபரபபிற் கிடக்கும.

எடுத்துக்காட்டு 2. விசைகள் $\alpha\overrightarrow{BC}$, $\beta\overrightarrow{CA}$, $\gamma\overrightarrow{AB}$, $\lambda\overrightarrow{DA}$, $\mu\overrightarrow{DB}$, $\nu\overrightarrow{DC}$ என்பன ஒரு நான்முகி $ABCD$ இன் விளிம்புகளின் வழியே தாக்குகின்றன. அவை ஒரு தனிவிசையாய் ஒடுங்குமெனின்,

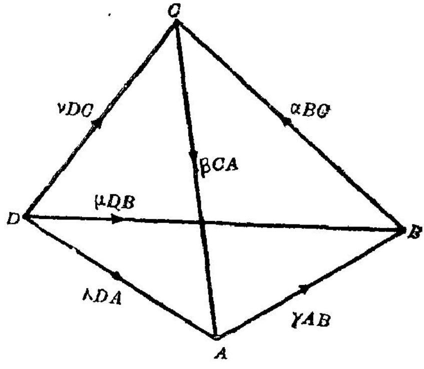
$$\lambda\alpha+\mu\beta+\nu\gamma=0,$$

எனக் காட்டுக.

D எனபதை உற்பததியாயும A, B, C எனபனவற்றின் நிலைககாவிகளை முறையே **a**, **b**, **c** என்பனவாயுங் கொளக.

எனின், விசைகள

$$\alpha\,(\mathbf{c}-\mathbf{b}),\ \beta\,(\mathbf{a}-\mathbf{c}),\ \gamma\,(\mathbf{b}-\mathbf{a}),\ \lambda\mathbf{a},\ \mu\mathbf{b},\ \nu\mathbf{c}\ \text{ என்பனவாகும்.}$$



படம் 6

ஆயின்,

$$\mathbf{R}=\sum\mathbf{F}=\alpha(\mathbf{c}-\mathbf{b})+\beta(\mathbf{a}-\mathbf{c})+\gamma(\mathbf{b}-\mathbf{a})+\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b}+\nu\mathbf{c}$$
$$=(\beta-\gamma+\lambda)\,\mathbf{a}+(\gamma-\alpha+\mu)\,\mathbf{b}+(\alpha-\beta+\nu)\,\mathbf{c},$$
$$\mathbf{G}=\sum\mathbf{r}\times\mathbf{F},$$
$$=\mathbf{b}\times\alpha(\mathbf{c}-\mathbf{b})+\mathbf{c}\times\beta(\mathbf{a}-\mathbf{c})+\mathbf{a}\times\gamma(\mathbf{b}-\mathbf{a})$$
$$=\alpha\mathbf{b}\times\mathbf{c}+\beta\mathbf{c}\times\mathbf{a}+\gamma\mathbf{a}\times\mathbf{b}.$$

அத்தொகுதி ஒரு தனி விசையாய் ஒடுங்குதற்குரிய நிபந்தனை $\mathbf{G}.\mathbf{R}=0$ அதாவது

$$[(\beta-\gamma+\lambda)\,\alpha+(\gamma-\alpha+\mu)\,\beta+(\alpha-\beta\times\nu)\,\gamma]\,[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]=0.$$

$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ என்பன ஒரே தளத்தில் இல்லையாதலால், $[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]\neq 0$. அந்நிபந்தனை

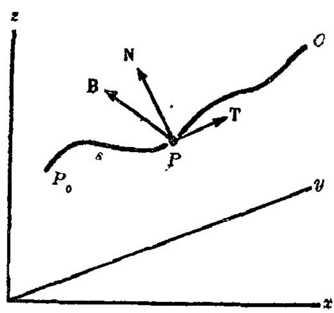
$$\lambda\alpha\times\mu\beta+\nu\gamma=0$$

என்பதாய் ஒடுங்கும்.

இயக்கவியல்

5.3. வெளி–வளையி

$\mathbf{r}$ எனனும் நிலைக்காவியையுடைய புளளி P யானது வெளியில் C என்னும் ஒரு திருகிய வளையியிற கிடக்கின்றதென்றும, P_0P எனனும் வில்லின் நீளம் s எனறுங் கொளக; இஙகு, P_0 ஆனது C யின் மீதுள்ள ஒரு நிலையான புள்ளி.



படம் 7

P_1 ஆனது P இற்கு அண்மையிலுள்ள ஒரு புள்ளியாகுமிடத்து, அவ்வளையிக்கு P இல் வரையபபடுந் தொடலி என்பது P_1 ஆனது P ஐ அணுகவரும் நாண PP_1 இன எல்லை என வரையறுககப்படும். s ஐக்

குறித்து எடுக்கும் வகையீடுகளைக் கீறுகளாற் குறிக்க P இலுள்ள தொடலி வழியே அலகுக்காவி

$$\mathbf{T}=\frac{d\mathbf{r}}{ds}=\mathbf{r}'$$

என அதிகாரம் மூன்றிற் காட்டப்பட்டுள்ளது.

P_1, P_2 எனபன C யில P யிற்கு அணமையிலுளள புள்ளிகளாயிருக்கு மிடத்து PP_1P_2 என்னும ஒரு தளதடதை எடுத்துநோக்குதலாலும் P_1, P_2 எனபண P யை அணுக எல்லையை எடுப்பதாலும் P யிலுள்ள கொஞ்சுதளம வரையறுக்கப்படும். $\mathbf{R}$ ஆனது இத்தளத்திலுள்ள ஒரு புளளியின நிலைக்காவியெனின்,

$$[\mathbf{R}-\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'']=0, \text{ அல்லது } [\mathbf{R}-\mathbf{r}, \mathbf{T}, \mathbf{T}']=0 \tag{9}$$

அக் கொஞ்சுதளம் தானசன் காவி $\mathbf{T}$ ஐயும் அதன பெறுதிக் காவி $\mathbf{T}'$ ஐயும் கொண்டுள்ளது. P யில் அவ்வளையிக்கு வரையப்படுஞ் செவ்வன களுள, அக் கொஞ்சு தளத்திற கிடக்கும ஒரு செவ்வன் உணடு. இது **தலைமைச் செவ்வன்** எனப்படும்; இதன் வழியே உள்ள அலகுக்காவி $\mathbf{N}$ ஆற் குறிககபபடும. வகையிட $\mathbf{T}^2=1$ எனபது $\mathbf{T}.\mathbf{T}'=0$ என்பதைத் தரும; இது $\mathbf{T}'$ ஆனது $\mathbf{T}$ இறகுச் செங்குததென்றும் அதுபற்றி P யில் ஒரு செவவனின் வழியே கிடக்குமென்றுங் காட்டுகிறது. அனறியும் $\mathbf{T}'$ ஆனது கொஞ்சு தளத்திற் கிடககினறதெனக் கண்டோம். ஆயின், $\mathbf{T}'$ ஆனது P யில் தலைமைச் செவ்வனின வழியே கிடக்கும். $\kappa=|\mathbf{T}'|$ ஆகு மிடதது

$$\mathbf{T}'=\kappa\mathbf{N} \tag{10}$$

என எழுதுவோம். P யிற் கொஞ்சுதளத்திற்கு வரையப்படுஞ் செவ்வன P யிலுள்ள இருமைச செவ்வன எனபபடும். அதன் வழியே உள்ள அலகுககாவி $\mathbf{B}$ எனபதாற் குறிககப்படும். $\mathbf{B}$ இறகு $\mathbf{T}\times\mathbf{T}'$ என்பதன் திசையே உணடு.

$\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$ எனபன காவிகளின் நிமிர்கோண மூவடை ஒன்றை ஆககி நிறகும்; $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$ எனபன இநத ஒழுங்கில் ஒரு நேர் மூவடையை ஆக்குமாறு அவறறின் நோத் திசைகள் எடுககப்படும். P யானது அவ்வளையி வழியே அசைய, அம்மூவடை திசையிலே திருகலடையும்.

இககாவிகள் s ஓடு மாறும் வீதஙகள்,

$$\mathbf{T}'=\kappa\mathbf{N},\ \ \mathbf{N}'=\tau\mathbf{B}=\kappa\mathbf{T},\ \ \mathbf{B}'=-\tau N \tag{11}$$

என்னுஞ் சமனபாடுகளைத திருப்திப்படுத்தல் காணப்படும்; இவை **செறெற்–பிறெனெற் சூத்திரங்கள்** எனப்படும்; κ ஆனது $\mathbf{B}$ பற்றிய அமமூவடையின் சுழறசிவீதம்; τ ஆனது $\mathbf{T}$ பற்றிய சுழற்சி வீதம். κ ஆனது வளைவெனபபடும; τ ஆனது முறுக்கலெனப்படும். $P=1/\kappa$ எனபது வளைவாரையெனறும $\sigma=1/\tau$ எனபது முறுக்கலாரையென்றுங் கூறப்படும்.

ஒரு தளவளையிக்கான, கொஞ்சுதளம் அவ்வளையியின் தளமாகும்; இருமைச் செவ்வன் இத்தளத்திற்குச் செங்குத்து; முறுக்கல் மறையும்; ρ ஆனது வளைவாரையாகும்.

புள்ளி P யானது வளையி C யின் நீளத்துக்கு அசைய அப்புள்ளியின் வேகத்திற்கும் ஆர்முடுகலுக்குங் கோவைகளைப் பெறுதல் பயன்படும். P இன் வேகம்

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{ds}{dt}\frac{d\mathbf{r}}{ds} = v\mathbf{T},$$

P யின் ஆர்முடுகல

$$\mathbf{f} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\mathbf{T}) = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v^2\frac{d\mathbf{T}}{ds},$$

$$= \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{N}.$$

ஆயின், அம்மூவடையின் திசைகளின்வழியே வேகக கூறும் ஆர்முடுகற் கூறும்

$$\mathbf{v} = (v, 0, 0)$$

$$\mathbf{f} = \left(\frac{dv}{dt}, \frac{v^2}{\rho}, 0\right)$$

என்பவை. வேகம் தொடலி வழியேயும் ஆர்முடுகல் கொஞ்சுதளத்திலும் உண்டு.

எடுத்துக்காட்டு 1. $x = a$ கோசை θ, $y = a$ சைன்θ, $z = c\theta$ என்னும் பரமானச் சமன்பாடுகளால் ஒரு வெளி—வளையி தரப்பட்டுள்ளது. அலகுக் காவிகள் $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{B}$ என்பனவற்றையும் வளைவு κ ஐயும் முறுக்கல் τ ஐயுங் காண்க.

$$\mathbf{r} = a \text{ கோசை } \theta\, \mathbf{i} + a \text{ சைன் } \theta\, \mathbf{j} + c\theta\mathbf{k}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\theta} = -a \text{ சைன் } \theta\mathbf{i} + a \text{ கோசை } \theta\mathbf{j} + c\mathbf{k},$$

$$\frac{ds}{d\theta} = \left|\frac{d\mathbf{r}}{d\theta}\right| = \sqrt{(a^2 \text{ சைன்}^2\, \theta + a^2 \text{ கோசை}^2\, \theta + c^2)} = \sqrt{(a^2 + c^2)}.$$

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{(a^2 + c^2)}}(-a \text{ சைன் } \theta\mathbf{i} + a \text{ கோசை } \theta\mathbf{j} + c\mathbf{k}).$$

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{1}{(a^2 + c^2)}(-a \text{ கோசை } \theta\mathbf{i} - a \text{ சைன் } \theta\mathbf{j}) = \kappa\mathbf{N}.$$

எனின்,

$$\kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \frac{a}{a^2 + c^2}, \quad \mathbf{N} = (-\text{கோசை } \theta\mathbf{i} - \text{சைன் } \theta\mathbf{j})$$

$$\mathbf{B}=\mathbf{T}\times\mathbf{N}=\frac{1}{\sqrt{(a^2+c^2)}}(c \text{ சைன் } \theta\mathbf{i}-c \text{ கோசை } \theta\mathbf{j}+a\mathbf{k}).$$

$$\tau\mathbf{N}=-\frac{d\mathbf{B}}{ds}=\frac{-1}{a^2+c^2}(c \text{ கோசை } \theta\mathbf{i}+c \text{ சைன் } \theta\mathbf{j})$$

$$=\frac{c}{a^2+c^2}\mathbf{N}.$$

எனின், $\tau=c/(a^2+c^2)$.

எடுத்துக்காட்டு 2. யாதுமொரு வெளி வளையிக்கு

$$[\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''']=\kappa^2\tau$$

எனக் காட்டுக.

$$\mathbf{T}'=\kappa\mathbf{N},\ \mathbf{T}''=\kappa\mathbf{N}'+\kappa'\mathbf{N}=\kappa(\tau\mathbf{B}-\kappa\mathbf{T})+\kappa'\mathbf{N},$$

$$\text{இ. கை. ப.}=[\mathbf{T}, \mathbf{T}', \mathbf{T}'']=[\mathbf{T}, \kappa\mathbf{N}, -\kappa^2\mathbf{T}+\kappa'\mathbf{N}+\kappa\tau\mathbf{B}],$$

$$=\kappa^2\tau[\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}]=\kappa^2\tau.$$

எடுத்துக்காட்டு 3. ஒரு வெளி—வளையி வழியே அசையும் ஒரு துணிக்கைக்கு வேகம் $\mathbf{v}$ உம், ஆர்முடுகல் $\mathbf{f}$ உம் உண்டெனின், அதன் வளைவாரை

$$\rho=\frac{v^3}{|\mathbf{v}\times\mathbf{f}|}$$

எனக் காட்டுக.

$$\mathbf{v}=v\mathbf{T}$$

$$\mathbf{f}=\frac{dv}{dt}\mathbf{T}+\frac{v^2}{\rho}\mathbf{N}$$

எனின,

$$\mathbf{v}\times\mathbf{f}=\frac{v^3}{\rho}\mathbf{T}\times\mathbf{N}=\frac{v^3}{\rho}\mathbf{B}.$$

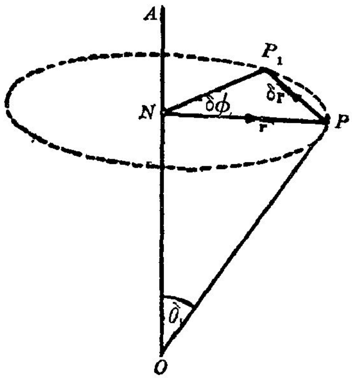
ஆகவே,

$$|\mathbf{v}\times\mathbf{f}|=\frac{v^3}{\rho}.$$

5.4. நுண்ணளவுச் சுழற்சிகள். கோணவேகம்

ஒரு கோணம $\delta\phi$ இறகூடாகச் ஓர் அச்சு OA பற்றி ஒரு புள்ளி P ஆனது சுழலுஞ் சுழறசியை எடுத்து நோககுக. $\mathbf{e}$ ஆனது OA யின் வழியே அலகுக் காவியெனக கொளக. PN ஆனது P யிலிருநது OA யிற்கு வரையுஞ் செங்குத்தெனின், N என்னும மையததையும் NP என்னும் ஆரையையுங் கொண்ட ஒரு வட்டத்தின வில்லின் வழியே அசசுழற்சி

P ஐ P_1 இற்கு இயக்கும் : இங்கு OA யானது அவ்வட்டத்தின் தளத்திற்குச் செவ்வன் ; $\widehat{PNP_1} = \delta\phi$.



படம் 8

P யின் நிலைக்காவி $\mathbf{r}$ எனறும் P_1 இன் நிலைக்காவி $\mathbf{r} + \delta\mathbf{r}$ என்றுங் கொள்க.

$$|\delta\mathbf{r}| = PP_1 = 2\ PN \text{ சைன் } (\tfrac{1}{2}\delta\phi).$$

சிறு $\delta\phi$ இற்கு

$|\delta\mathbf{r}|$ ஆனது அண்ணளவாக

$$2r \text{ சைன } \theta\ (\tfrac{1}{2}\delta\phi) = r \text{ சைன் } \theta\ \delta\phi.$$

அன்றியும் $\delta\mathbf{r}$ இன் திசை OA யிற்கும் $\delta\phi \to 0$ எனற எல்லையில் OP யிற்குஞ் செங்குத்து.

எனின், சிறு $\delta\phi$ இற்கு,

$$\delta\mathbf{r} = \mathbf{e} \times \mathbf{r}\delta\phi. \tag{12}$$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + (\mathbf{e}\delta\phi) \times \mathbf{r}. \tag{13}$$

P ஐ P_1 இற்குக் கொண்டுபோய் $\mathbf{e}_1$ பற்றி $\delta\phi_1$ உம் அதன்பின் P_1 ஐ P_2 இறகுக கொண்டுபோய $\mathbf{e}_2$ பறறி $\delta\phi_2$ உம் ஆகிய இரண்டு அடுத்துவரும் நுணணளவுச சுழறசிகளை நாம் எடுத்து நோக்குவோமாயின், அவ்விரு சுழற்சிகளும் ஒழுஙகுமாற்றுப் பெறலாம் என்பதை நாம் காட்டல் முடியும். (இம்முடிபு முடிவுள்ள சுழற்சிகளுககு உண்மையாகாது.)

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} + (\mathbf{e}_1\delta\phi_1)\times\mathbf{r}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{12} &= \mathbf{r}_1 + (\mathbf{e}_2\delta\phi_2)\times\mathbf{r}_1\\ &= \mathbf{r} + (\mathbf{e}_1\delta\phi_1)\times\mathbf{r} + \mathbf{e}_2\delta\phi_2\times\{\mathbf{r} + (\mathbf{e}_1\delta\phi_1)\times\mathbf{r}\}\\ &= \mathbf{r} + (\mathbf{e}_1\delta\phi_1 + \mathbf{e}_2\delta\phi_2)\times\mathbf{r}. \end{aligned} \tag{14}$$

இங்கு $\delta\phi_1\delta\phi_2$ இலுள்ள உறுப்புக்கள் புறக்கணிககப்பட்டுள்ளன. எனின்

$$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_{21}. \tag{14A}$$

அச்சு $\mathbf{e}$ பற்றி நேரம் δt இல் நிகழும் ஒரு சுழற்சி $\delta\phi$ ஐ எடுத்து நோக்கி δt ஆனது பூச்சியததை அணுகும் எல்லைக்குச் சென்று அதனுலே $d\phi/dt$ என்பதை வரையறுக்க,

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}\mathbf{e}. \tag{15}$$

என்னுங் காவியைப் பெறுவோம் ; இது கோணவேகக் காவி எனப்படும. எனின் சமன்பாடு (12) தருவது

$$\delta\mathbf{r} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}\delta t$$

ஆயின், புள்ளி P யின வேகம்

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}. \tag{16}$$

இவ்வேகத்தின் பருமன் $|\boldsymbol{\omega}|\,|\mathbf{r}|$ சைன் $\theta = \omega.NP$.

முடிபு (16) ஆனது கோடு OP யிலுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளுக்கும் பொருந்துமாதலால், $\boldsymbol{\omega}$ எனபதைக் கோடு OP யின் கோணவேகக் காவி யென உரைக்கலாம்.

சமன்பாடு (14) ஐக கொண்டு கோணவேகங்களின் கூட்டல் மாற்றுவிதிகரு உட்பட்டது என்றும் இரு கோணவேகங்கள் $\boldsymbol{\omega}_1$, $\boldsymbol{\omega}_2$ எனபன காரணமாக வுள்ள ஒரு புள்ளி P யின் வேகம்

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{r}} &= \underset{\delta t\to 0}{\text{எல்}}\frac{\mathbf{r}_{12}-\mathbf{r}}{\delta t} = (\dot{\phi}_1\mathbf{e}_1 + \dot{\phi}_2\mathbf{e}_2)\times\mathbf{r}\\ &= (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2)\times\mathbf{r}\end{aligned}$$

என்றும் நாம் உய்ததறியலாம.

அவ்வேகம் தனிக் கோணவேகம் $\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$ எனபதன காரியமாகவுள்ள தற்குச் சமன் என்பதை இது காட்டும். ஆயின், ஒரே புள்ளிபற்றிய கோணவேகங்கள் காவிகளுக்குரிய வழக்கமான செயன்முறைப்படி கூட்டப் படலாம் அல்லது துணிக்கப்படலாம.

5.5. ஒரு விறைப்பான பொருளின் கோணவேகம்

ஒரு விறைப்பான பொருளுக்கு ஒரு நிலையான புள்ளி O பற்றிச் சுழலச் சுயாதீனம் இருந்தால், அப்பொருளின் யாதுமொரு புள்ளி P யின் வேகம் $\boldsymbol{\omega}$ என்னும் கோண வேகத்தாலாயதெனக் கொள்ளுமாறு

$\boldsymbol{\omega}$ என்னும் ஒரு கோண வேகக் காவி உண்டு எனக் காட்டலாம் ; அதாவது P யின் வேகம் $\dot{\mathbf{r}}$ ஆனது

$$\dot{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{17}$$

என்பதாலே தரப்படும்.

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1, \ \dot{\mathbf{r}}_2 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_2$$

என்பனவற்றேடு அப்பொருளின் $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ என்னும இரண்டு புள்ளிகளுக்கு அத்தகைத்தான ஓர் $\boldsymbol{\omega}$ உண்டு எனக் கொள்க.

புள்ளிகள் O, P_1, P_2 என்பன ஒரு விறைப்பான பொருளில் இருத்தலால்,

$$\mathbf{r}_1^2, \ \mathbf{r}_2^2, \ (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)^2$$

எனபன எல்லாம் மாறிலிகள். எனின் t ஐக் குறித்து வகையிட,

$$\mathbf{r}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{r}_2 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2 = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \cdot (\dot{\mathbf{r}}_1 - \dot{\mathbf{r}}_2) = 0.$$

இதிலிருந்து,

$$\mathbf{r}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2 + \mathbf{r}_2 \cdot \dot{\mathbf{r}}_1 = 0$$

என்பதையும் நாம் பெறுவோம்.

$\boldsymbol{\omega}$ ஆனது $\dot{\mathbf{r}}_1$, $\dot{\mathbf{r}}_2$ எனனும் இரண்டுக்குஞ் செங்குத்து ; எனின், சில α இற்கு

$$\boldsymbol{\omega} = \alpha(\dot{\mathbf{r}}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_2)$$

என நாம் எழுதலாம். $\boldsymbol{\omega}$ இறகுப் பிரதியிட,

$$\dot{\mathbf{r}}_1 = -\alpha \mathbf{r}_1 \times (\dot{\mathbf{r}}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_2) = -\alpha(\mathbf{r}_1 \cdot \dot{\mathbf{r}}_2)\dot{\mathbf{r}}_1$$
$$\dot{\mathbf{r}}_2 = \alpha(\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \mathbf{r}_2)\dot{\mathbf{r}}_2.$$

ஆயின்,

$$\alpha = 1/(\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \mathbf{r}_2) \ ;$$
$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\dot{\mathbf{r}}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_2}{\dot{\mathbf{r}}_1 \cdot \mathbf{r}_2} = \frac{\dot{\mathbf{r}}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_1}{\dot{\mathbf{r}}_2 \cdot \mathbf{r}_1}.$$

$\mathbf{r}$ ஆனது அவ்விறைபபான பொருளின் ஒரு மூன்றும் புள்ளியாகுக. விறைப்பு நிபந்தனைகள்

$$\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}_1 + \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_1 = \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{r}}_2 + \dot{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}_2 = 0$$

$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \mathbf{q}$ என எழுத

$$(\mathbf{q} - \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{r} = 0, \ (\mathbf{q} - \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{r}_1 = 0, \ (\mathbf{q} - \dot{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{r}_2 = 0$$

எனபனவற்றை உயத்தறிதல எளிது.

$\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ என்பன ஒரு தளமானவையலலாவெனின், $\mathbf{q} - \dot{\mathbf{r}}$ என்பது அவை எல்லாவற்றிற்கும் ஒருங்குச் செங்குத்தாகாது ; எனின் அது சூனியக் காவியாகும்.

அதாவது எல்லா $\mathbf{r}$ இற்கும்

$$\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{q} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

$\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ எனபவை ஒரு தளமானவையெனின்,

$$\mathbf{r} = \lambda \mathbf{r}_1 + \mu \mathbf{r}_2$$

என நாம் எழுதலாம் ; இங்கு, λ, μ என்பன தந்த $\mathbf{r}$, $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ இற்கு மாரு எண்ணிகள்.

எனின்,

$$\dot{\mathbf{r}} = \lambda \mathbf{r}_1 + \mu \mathbf{r}_2 = \lambda \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_1 + \mu \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_2$$
$$= \boldsymbol{\omega} \times (\lambda \mathbf{r}_1 + \mu \mathbf{r}_2) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

ஆயின் ஒரு பொருளின் புள்ளிகள் எல்லாவற்றின் இயக்கமும் O பற்றிய கோண வேகம் $\boldsymbol{\omega}$ ஆல் ஆயதெனக் கொள்ளுமாறு ஒரு காவி $\boldsymbol{\omega}$ உண்டு.

$\boldsymbol{\omega}$ இன் திசையில உற்பத்திக்கூடாகச் செல்லுங் கோடானது தன்மீதுளள ஒவ்வொரு புள்ளிக்கும் வேகம் இல்லாதவாறு இருக்கின்றது. இக்கோடு **சுழற்சி அச்சு** எனப்படும. $\boldsymbol{\omega}$ நேரத்தில் மாறுமெனின், $\boldsymbol{\omega}$ இன திசை **கணநிலையச்சு** எனபபடும்.

அப்பொருளின் யாதுமொரு புள்ளியும் நிலையானதாய் இல்லாத பொது வகையில், அபபொருளின் ஒரு புள்ளி O பற்றி அப்பொருளின் கோண வேகம் $\boldsymbol{\omega}$ ஒடு அபபொருளின் புள்ளி O வின வேகம $\mathbf{u}$ ஆல, இயக்கம் குறித்துச் சொலலபபடும்.

$\overrightarrow{OP} = \mathbf{r}$ ஆகுமிடத்து அப்பொருளின் ஒரு புள்ளி P யின் வேகம்

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}. \tag{18}$$

அபபொருளின வேறெரு புள்ளி O' ஆனது உற்பத்தியாக வழஙகபபட $\mathbf{u}'$, $\boldsymbol{\omega}'$ எனபன ஒதத நோகோட்டு வேகமும் கோணவேகமுமாயின, $\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{u}' = \mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{a}$. O விற்கூடாகச் செலலும் ஓர் அச்சுப்பற்றிய ஒரு சுழற்சி $\boldsymbol{\omega}$ வின் விளைவானது $\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{OO'}$ என்னும் ஓர் இடப்பெயர்வுடன் O' இற்கூடாகச செல்லும் ஒரு சமாந்தரவச்சுப் பறறிய ஒரு சுழறசி $\boldsymbol{\omega}$ வின் விளைவுக்குச் சமானமானது.

O' ஐ இசைவாய்த் தெரிதலால், ஒரு குறிக்கப்பட்ட கோட்டின் வழியே ஓா இடப்பெயர்வையும் அதே கோடுபற்றிய ஒரு சுழற்சியையுங் கொண்ட இயக்கமாக அப்பொருளின் இயக்கத்தை ஒடுக்குதல் முடியும் ; அத்தகைய இயக்கம் **திருகியக்கம்** எனப்படும் ; அக்கோடு திருகச்செனப்படும் ; அத் திருகின் புரியிடை

$$p = |\mathbf{u}'|/|\boldsymbol{\omega}| = \frac{\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}}{\omega^2}. \tag{19}$$

அவ்வச்சின் சமன்பாடு
$$\mathbf{u} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = p\boldsymbol{\omega} \tag{20}$$

என்னும் வடிவத்தில் எழுதப்படலாம் ; மற்றொரு வகையாக λ என்பது ஒரு பரமானம் ஆகுமிடத்து

$$\mathbf{r} = \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}}{\omega^2} + \lambda \boldsymbol{\omega} \qquad (21)$$

என எழுதப்படலாம்.

p ஆனது மறையுமிடத்து, இயக்கம் அவ்வச்சுப பற்றியுள்ள தூய சுழற்சி இயக்கமாகும்.

இயக்கத்தியலில் விறைப்புப் பொருளியக்கத்தில் வருகின்ற கணிதத் தொடர்புகளுக்கும் நிலையியல் விசைகள் பற்றிய கணிதத் தொடர்புகளுக்கும் நெருங்கிய ஒப்புமை உண்டு. அப்பொருளின் கோணவேகம் $\boldsymbol{\omega}$ ஆனது ஒரு விசைத் தொகுதியின் காவிக் கூட்டுத்தொகை $\mathbf{R}$ இற்கு ஒப்பானது ; அப்பொருளின் ஒரு புள்ளி $\mathbf{r}_0$ இன் வேகம் அவ்விசைத் தொகுதியின் $\mathbf{r}_0$ பற்றிய திருப்பத்துக்கு ஒப்பானது.

தனது சொந்தத் தளத்திற் சுழலுகின்ற தளத் தகடொன்றுக்குக் கோண வேகக் காவி $\boldsymbol{\omega}$ ஆனது அத்தளத்திற்கான செவ்வனின் வழியே இருக்கும். $\mathbf{n}$ ஆனது அச் செவ்வனின் வழியே உள்ள அலகுக் காவி யாயிருக்க, ϕ ஆனது அப்பொருளின் நிலையான ஒரு கோடு வெளியில் நிலையான ஒரு கோட்டோடு ஆக்குங் கோணமெனின்,

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi}\mathbf{n}.$$

கணநிலையச்சு அத்தளத்தைச் சந்திக்கும் புள்ளி I ஆனது **கணநிலை மையம்** எனப்படும். அத்தட்டிலுள்ள ஒரு புள்ளி P யின் வேகம் $\boldsymbol{\omega} \times \overrightarrow{IP}$; இது அத்தள நெடுக IP இற்குச் செங்குத்தாயும் $IP \cdot \dot{\phi}$ என்னும் பருமனுடையதாயும் இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1. a, b $(b > a)$ என்னும் ஆரைகளையுடைய இரண்டு ஒருமையக் கோளங்கள்ளானவை நிலையான விட்டங்கள் பற்றி முறையே ω_1, ω_2 என்னும் மாறாக் கோண வேகங்களோடு சுழலுமாறு செய்யப்படுகின்றன. C என்னும் மையமும் $\frac{1}{2}(b-a)$ என்னும் ஆரையுமுள்ள ஒரு கோணம் அவ்விரு கோளங்களையுந் தொட்டபடி உருள்கின்றது. மையம் C யானது மாறாக் கோண வேகத்தோடு ஒரு வட்டத்தை வரைகின்றதெனக் காட்டுக.

[*cf. Lond. S. 1946*]

$\mathbf{e}$ ஆனது OC யின் நீளத்திற்கு உள்ள அலகுக் காவியாகுக.

$\boldsymbol{\Omega}$ ஆனது உருளுங் கோளத்தின் கோண வேகமாகுக. C யின் நிலைக்காவி $\frac{1}{2}(a+b)\mathbf{e}$; எனின், C யின் வேகம்

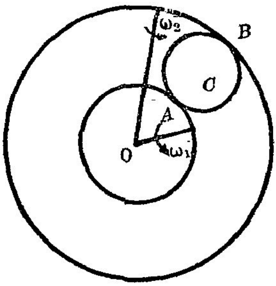
$$\mathbf{u} = \tfrac{1}{2}(a+b)\,\dot{\mathbf{e}} \qquad (22)$$

உருளுதற்குரிய நிபந்தனையானது அவ்விரு பொருள்களின் தொடு புள்ளி கள் ஒரே வேகமுடையனவாயிருத்தலே ; எனின், உருளுதற்குரிய நிபந் தனை B யில்

$$\mathbf{u} + \mathbf{\Omega} \times \tfrac{1}{2}(b-a)\,\mathbf{e} = \boldsymbol{\omega}_2 \times b\mathbf{e} \tag{23}$$

A இல்,

$$\mathbf{u} - \mathbf{\Omega} \times \tfrac{1}{2}(b-a)\,\mathbf{e} = \boldsymbol{\omega}_1 \times a\mathbf{e}. \tag{24}$$



படம் 9

(23) ஐயும் (24) ஐயுங் கூட்ட,

$$2\mathbf{u} = (a\boldsymbol{\omega}_1 + b\boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{e}.$$

இது பின்வருமாறு எழுதப்படலாம் :

$$\mathbf{u} = \frac{a\boldsymbol{\omega}_1 + b\boldsymbol{\omega}_2}{a+b} \times \tfrac{1}{2}(a+b)\mathbf{e}.$$

புள்ளி *C* யின் இயக்கம

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{a\boldsymbol{\omega}_1 + b\boldsymbol{\omega}_2}{a+b}$$

என்னுங் கோண வேகத்தாலாயதெனக் கொள்ளப்படலாம் என்பதை இது காட்டுகின்றது.

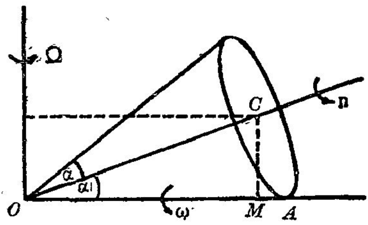
$\boldsymbol{\omega}$ ஆனது திசை பருமன்கள பற்றி நிலையானது; ஆதலால், புள்ளி *C* ஆனது மாறுக்கதியுடன ஒரு வட்டத்தை வரைகின்றது.

எடுத்துக்காட்டு 2. உச்சி O உம் அரையுச்சிக் கோணம் α உம் உள்ள ஒரு நேர் வட்டக் கூம்பு ஒரு கிடைத் தளத்திலே தனது பிறப்பாக்கியொன்றின் வழியே எக்கணத்திலும் அத்தளத்தைத் தொட்ட வண்ணம் உருள்கின்றது. $\mathbf{n}$ ஆனது அக்கூம்பின் அச்சுப் பற்றிய கோண வேகமாயும், $\boldsymbol{\omega}$ ஆனது அக்கூம்பின் தொடுகையிலுள்ள பிறப்பாக்கியின் கோண வேகமாயும், $\mathbf{\Omega}$ ஆனது அக்கூம்பின் அச்சுக் கூடாகச் செல்லும் நிலைக்குத்துத் தளத்தின் கோண வேகமாயும் இருந்தால்,

$$n = \omega \text{ கோசை } \alpha,\ \Omega = -w \text{ தான் } \alpha$$

எனக் காட்டுக.

பிறப்பாக்கி OA கண நிலையச்சாகும். v ஆனது C யின் வேகமெனின், வேறுவேறு முறைகளில் அதனைக் கணிக்க நாம பெறுவது



படம் 10

$$v = \Omega . NC = -\omega MC$$

எனின், $\Omega = -\omega MC/NC = -\omega$ தான் α.

புள்ளி A ஆனது கண ஓய்விலிருத்தலாலும், A இன் வேகம் C இன் வேகத்தையும் C ஐக் குறித்த A இன் தொடர்பு வேகத்தையுங் கூட்ட வருங் கூட்டுத் தொகையாயிருததலாலும் நாம் பெறுவது

$$0 = CA . n + v$$

$$n = -v/CA = \omega . CM/CA = \omega \text{ கோசை } \alpha.$$

அழுத்தக் கொள்கை

5.6. கவுசின் தேற்றம்

பிரயோக கணிதக் கிளைகள் பலவற்றில் மின்புலம், காந்தப்புலம், ஈர்ப்புப் புலம் முதலிய புலங்களைப் பற்றிய கல்விகளில ஈடுபடுகினறோம். இப் புலஙகள் ஊற்றுக்களால் (உறிஞ்சிகளாலும) ஆக்கப்படும.

உதாரணமாக, மின்னிலையியலில் மினனேற்றங்களாலும், ஈர்ப்பில் சடத் திணிவுகளாலும், நீரப் பொறியியலில் பாயவூற்றுக்களாலும (அல்லது பாயவுறிஞ்சிகளாலும்) ஆககப்படும். ஊற்றுக்கள (அல்லது உறிஞ்சிகள்) ஒரு கனவளவிற்கூடாகவோ ஒரு பரப்பிலோ ஒரு வளையி மீதோ பரம்பி யிருக்கலாம் ; ஆதலால், நாம் கனவளவுப பரமபல்கள, பரபபுப் பரம்பல் கள், கோட்டுப் பரம்பல்கள் என்று வகுத்துரைக்கினறோம். கனவளவுப் பரம்பலுக்கு, P எனனும் ஒரு புள்ளியைச் சுற்றியுள்ள ஒரு சிறு கனவளவு $d\Omega$ இல் ஊற்று $\rho\, d\Omega$ ஆக அப்புள்ளி P இல ஒரு கனவளவடர்த்தி ρ ஐ நாம் வரையறுககினறேம. சடமானது அமைபபில் மணி வடிவ மாயிருக்கின்றபோதிலும் தொடர்சசியான அடர்ததிச் சார்போடு கூடிய ஒரு சமானப் பரம்பலாய் உள்ள சடத்தை அவ்விரு பரம்பல்களுக்கும் ஒரே

சராசரி உடைமைகள் இருக்குமாறு பிரதியிடுதல் வசதியாகும். அதுபோல, பரப்படர்த்தியானது பரப்பு dS இலுள்ள ஊற்று $\sigma\, dS$ ஆக அப்பரப்பின் மீது ஒரு தொடாச்சியான சார்பு σ ஆல் வரையறுக்கப்படும் ; கோட்டடர்த்தி λ ஆனது நீளம் ds இலுள்ள ஊற்று $\lambda\, ds$ ஆக வரையறுக்கப்படும். ஊற்றுக்கள் கேத்திர கணிதப புள்ளிகளில் இருப்பனவாகக் கொள்ளுதல் பெரும்பாலும் பயன்படும் ; அப்போது அவை புள்ளியூற்றுக்கள் எனப் படும் ; அவற்றின் வலிமை e அல்லது m போன்ற குறியீடுகளாற் குறிக்கப்படும.

ஊற்றுக்களுக்கும் அவற்றால் ஆக்கப்படும் புலங்களுக்கும் உள்ள தொடர்புகள் பரிசோதனையாற் பெறப்பட்டு இரண்டு வேறு வேறு வழிகளிற் சூத்திர வடிவிலே தரப்பட்டுள்ளன. ஒன்று **நேர்மாறு வர்க்க** விதியாலே தரப்பட்ட இரண்டு ஊற்றுக்களினிடையேயுள்ள விசையைத் தரும் முடிபைப் பயன்படுத்தும். மற்றையது புலத்தின் பாயம **கவுசின் தேற்றத்தால்** விவரிக்கப்படும் எனனும் உடைமையைப் பயன்படுத்தும். இரண்டு சூத்திரங்களும் கணித முறையிற் சமம.

திணிவுகளால் ஆக்கப்படும் ஈர்ப்புப் புலத்தைப் பற்றி ஆராய்வோம். ஒன்றுக்கொன்று r தூரத்திலுள்ள m_1, m_2 என்னும் இரண்டு திணிவுகளுக்கு இடையிலுள்ள விசை $\gamma m_1 m_2/r^2$ எனனும் அளவுள்ள ஒரு கவர்ச்சி விசையென ஈர்ப்பின் நேர்மாறு வாக்க விதி கூறுகின்றது. யாதுமொரு புள்ளியிலுள்ள ஈர்ப்புப்புலமானது அப்புள்ளியில் வைக்கப்படும் ஓர் அலகுத் திணிவு அனுபவிக்கும் விசையென வரையறுக்கப்படும். உற்பத்தி O இல் வைக்கப்படும் ஒரு புள்ளித் திணிவு m காரணமாக $\mathbf{r}$ என்னும் நிலைக் காவியையுடைய ஒரு புள்ளி P இல் ஆக்கப்படும் புலம

$$\mathbf{F} = -\gamma \frac{m\mathbf{r}}{r^3}. \tag{25}$$

P_1 இல் m_1, P_2 இல் m_2 .... P_n இல் m_n என்னும் புள்ளித் திணிவுகளின் ஒரு தொகுதிக்கு, P இலுள்ள புலம்

$$\mathbf{F} = -\gamma \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i\,(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3}. \tag{26}$$

யாதுமொரு மூடிய பரப்பிற்குக் குறுக்கே புலக் காவியின் வெளிமுகப் பாயம

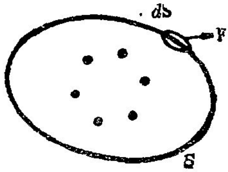
$$N = -4\pi\gamma M_i \tag{27}$$

எனக் கவுசின் தேற்றங் கூறும் ; இங்கு, M_i ஆனது அப் பரப்பினுல் அடைக்கப்பட்டுள்ள மொத்தத் திணிவு ; அதாவது

$$\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = -4\pi\gamma \text{ (அடைக்கப்பட்ட திணிவு)}.$$

கவுசின் தேற்றம் நேர்மாறு வர்க்க விதியிலிருந்தும் நேர்மாறு வர்க்க விதி கவுசின் தேற்றத்திலிருந்தும் பெறப்படலாம்.

நேர்மாறு வர்க்க விதியைப் பெறுதற்குக் கவுசின் தேற்றத்தை உண்மை யெனக் கொண்டு O விலுள்ள ஒரு துணிக்கை m ஆல் ஆகும் புலத்தை எடுத்து நோக்குக. மையம் O வும் ஆரை r உம் ஆன ஒரு கோளத்திற்குக்



படம் 11

கவுசின் தேற்றத்தைப் பிரயோகிக்க (படம் 12). சமச்சீரால், **F** ஆரைவழியே உள்ளது; அது அக்கோளத்தின எல்லாப் புள்ளிகளிலும் ஒரே பருமனுடையது.

எனின், பாயம்

$$N = 4\pi r^2 F.$$

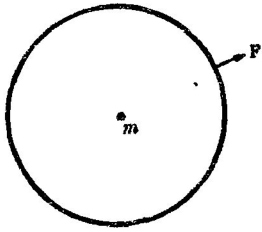
எனவே, கவுசின் தேற்றம் தருவது,

$$4\pi r^2 . F = -4\pi\gamma . m,$$

$$F = -\frac{\gamma m}{r^2}$$

ஆயின்

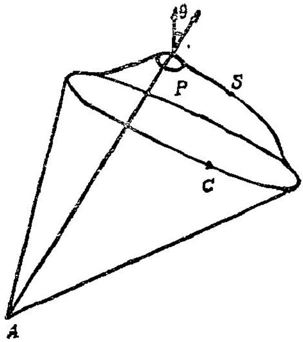
$$\mathbf{F} = -\frac{\gamma m \mathbf{r}}{r^3}.$$



படம் 12

மறுதலை முடிபை நிறுவுதற்குத் திண்மக் கோணங்களின் சில உடைமைகளைப் பயன்படுத்தல் சகாயந் தரும். S ஆனது நேர்கோடு யாதொன்றும்

இரண்டின் மேற்பட்ட புள்ளிகளிற் சந்தியாத ஓர் எளிய திறந்த பரப்பெண நினைக்க ; மூடிய வளையி C யானது S இன் வரைப்பாகுக.



படம் 13

தந்த ஒரு புள்ளி A யை C யின புள்ளிகளுக்குத தொடுக்குங் கோடுகள் ஒரு கூம்பைப் பிறபபிக்கும். A என்னும மையததையும் அலகாரையையுங் கொண்ட ஒரு கோளத்தில இககூம்பால் வெடடப்படும பரபபளவு அப்புள்ளி A யில் பரப்பு S ஆல் எதிரமைககப்படும் **திண்மக் கோணம்** ω எனப்படும். $\mathrm{d}S$ ஆனது P யிலுள்ள பரபபு மூலகமாயும், ω ஆனது A யில $\mathrm{d}S$ ஆல எதிரமைககபபடுந் திணமக கோணமாயும், θ ஆனது ஆரை AP யிறகும P யில் S யின் செவ்வனுக்கும் இடையிலுள்ள கோண மாயும் இருநதால், $\mathrm{d}S$ கோசை θ எனபது OP யிறகுச் செங்கோணங் களிலுள்ள ஒரு தளததின மீது $\mathrm{d}S$ இன எறியமாகும்.

இயல்பொதத பரபபுககளைப் பறறிய தேறறம் ஒன்றை வழஙக,

$$\frac{\mathrm{d}S \text{ கோசை } \theta}{\mathrm{d}\omega}=\frac{AP^2}{1^2}.$$

எனின்,

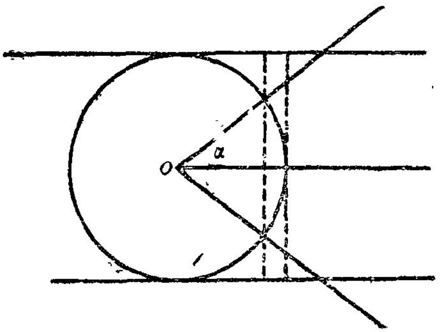
$$\mathrm{d}\omega=\frac{\mathrm{d}S \text{ கோசை } \theta}{r^2} \tag{28}$$

$$\omega=\int\frac{\text{கோசை } \theta}{r^2}\,\mathrm{d}S \tag{29}$$

இங்கு, $AP=r$ தொகையீடு பரபபு S இன மீது எடுக்கப்பட்டுள்ளது. A உம் S உம் படததில் உளளது போல இருநதால், கோணம் θ ஆனது S இன்மீது P யின் எல்லா நிலைகளுககும் கூாஙகோணமாகும ; $\mathrm{d}\omega$ ஆனது நேர்க் குறியுடையதாகும். A ஆனது எதிர்பபககததில எடுக்கப்படின், $\mathrm{d}S$ இற்கும் $\overrightarrow{AP}$ இற்கும இடையிலுள்ள கோணம விரிகோணமாகும் ; $\mathrm{d}\omega$ ஆனது மறைக்குறியையுடையதாகும.

எடுத்துக்காட்டு. உச்சிக்கோணம் 2α ஆயுள்ள ஒரு நேர்வட்டக் கூம்பின் உச்சியிலுள்ள திண்மக் கோணம் 2π (1 – கோசைα) எனக் காட்டுக.

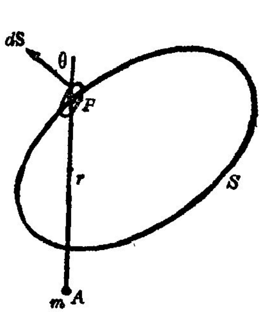
கூம்பின் உச்சி மையமாக அலகாரையையுடைய ஒரு கோளம் வரைக. அக்கூம்பு உள்ளேயுள்ள கோணத் தொப்பியின் பரப்பளவு சுற்றுருவமாக வரையும் உருளையிலிருந்து வெட்டப்படும் பரப்பளவுக்குச் சமம்; அது 2π (1 – கோசை α) ஆகும்.



படம் 14

பயிற்சி. ஒரு மூடிய பரப்பால் எதிரமைக்கப்படும் திண்மக் கோணம் ஒரு வெளிப் புள்ளியிற் பூச்சியமென்றும், ஓர் உட்புள்ளியில் 4π என்றும், பரப்பிலுள்ள ஒரு புள்ளியில் 2π என்றும் காட்டுக.

கவுசின தேற்றத்தைப பெறுதற்கு A யிலுள்ள ஒரு திணிவு m காரணமாக ஒரு மூடிய பரபபு S இன் குறுக்கேயுள்ள பாயத்தை நாம் கணிப்போம்.



படம் 15

$$\mathbf{F} = -\gamma m \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

$$\mathbf{F}.\mathrm{d}\mathbf{S} = -\gamma m \frac{\mathbf{r}\mathrm{d}\mathbf{S}}{r^3} = -\frac{\gamma\, m\mathrm{d}S \text{ கோசை } \theta}{r^2} = -\gamma\, m\mathrm{d}\omega$$

இனி $\int_S \mathrm{d}\omega = 0$, A ஆனது S இற்கு வெளிப்பக்கத்தில் இருந்தால் (30)

$= 4\pi$, A ஆனது S இற்கு உட்பக்கத்தில் இருந்தால் (31)

$\therefore\ N = \int_S \mathbf{F}.\mathrm{d}\mathbf{S} = 0$, A ஆனது S இற்கு வெளிப்பக்கத்தில் இருந்தால்.

$= -4\pi\gamma m$, A ஆனது S இற்கு உட்பக்கத்தில் இருந்தால்.

S இன் உட்பக்கம் வெளிப்பக்கம் ஆகிய இரண்டிலும் சடத்தின் ஒரு பரம்பல் இருந்தால், வெளிப்பக்கத் திணிவுகள் பாயத்திற்கு எப் பங்கும் கொடா ; ஒவ்வோர் உட்டிணிவும தன் திணிவின் $-4\pi\gamma$ மடங்கை உப காரஞ் செய்யும். ஆயின், முழுப் பரம்பலுக்குமான பாயம் S இற்குள் அடைக்கப்பட்ட திணிவின் $-4\pi\gamma$ மடங்காகும்.

பரம்பலானது மாறத்தக்க ρ என்னும் அடர்த்தியையுடைய ஒரு கன வளவுப் பரம்பலாகுமிடத்து, புலம் $\mathbf{F}$ இற்கு ஒரு வகையீட்டுச் சமன்பாடு கவுசின் தேற்றத்திலிருந்து உயத்தறியப்படலாம்.

$$\int_S \mathbf{F}.\mathrm{d}\mathbf{S} = -4\pi\gamma \int \rho \mathrm{d}\Omega$$

ஆதலால், இடக்கைப் பக்கத்தை ஒரு கனவளவுத் தொகையீடாகக் கவுசின் உருமாற்றத்தால் மாற்ற வருவது,

$$\int_\Omega \text{விரி } \mathbf{F}\mathrm{d}\Omega$$

எனின்,

$$\int_\Omega (\text{விரி } \mathbf{F} + 4\pi\gamma\rho)\, \mathrm{d}\Omega = 0.$$

ஒவ்வொரு மூடிய கனவளவு Ω இற்கும் இது உண்மையாதலால், ஒவ்வொரு புள்ளியிலும்

$$\text{விரி } \mathbf{F} + 4\pi\gamma\rho = 0 \qquad (32)$$

என அனுமானிக்கலாம்.

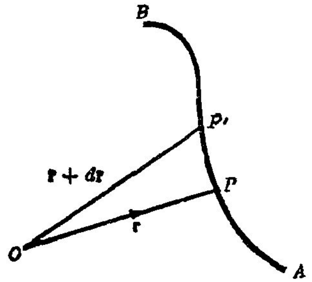
5.7. ஈர்ப்பழுத்தம்.

O வில் உள்ள ஒரு துணிக்கை m காரணமாக P யில் உள்ள புலம்

$$\mathbf{F} = -\gamma m \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

ஓர் அலகுத் துணிக்கை P யில் வைககப்பட்டால், அதன் மீதுள்ள விசை $\mathbf{F}$. இவ்வலகுத் துணிக்கையானது P யிலிருந்து அவ்வளேயி வழியே ஓர் அயற்புள்ளி P' இற்கு இடம் பெயர்க்கப்பட்டால்,

$$\text{செய்யப்பட்ட வேலே} = \mathbf{F}.d\mathbf{r} = -\gamma m\frac{\mathbf{r}d\mathbf{r}}{r^3} = \gamma m d\left(\frac{1}{r}\right).$$



படம் 16

ஆயின், துணிக்கையை A யிலிருந்து B யிற்கு இயக்குவதிற் செய்யப்படும் வேலே

$$\gamma m\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) \tag{33}$$

இது அத்துணிக்கை இயக்கப்படும் வழியைச் சாராது ; தொடக்கப் புள்ளியை யும் ஈற்றுப் புள்ளியையும் மாத்திரஞ் சார்ந்து நிற்கும். அத்தகைப் புலம் அழுத்தப் புலமாகும்.

$$\mathbf{F} = \text{படி } V \tag{34}$$

ஆகுமாறு ஓர் எண்ணிச் சார்பு V உண்டு ;

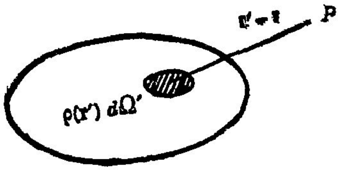
இங்கு,
$$V = \frac{\gamma m}{r} \tag{35}$$

என்பது O விலுள்ள திணிவு m காரணமாக P யிலுள்ள அழுத்தத்தைத் தரும் ; அது ஓர் அலகுத் துணிக்கையை P யிலிருந்து முடிவிலிக்கு இயக்குவதிற் செய்யப்படும் வேலே என்றும் வரையறுக்கப்படலாம்.

$\mathbf{r}_i$ இல் n புள்ளித்திணிவுகள் m_i ஐயுடைய ஒரு தொகுதிக்கு P யிலுள்ள அழுத்தம்

$$V = \sum_{i=1}^{n} \frac{\gamma m_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}. \tag{36}$$

சடத்தின் ஒரு கனவளவுப் பரம்பலுக்கு, கூட்டலின் இடத்தை ஒரு தொகை யீடு எடுக்கும் படத்திலுள்ளபடி, சடம் $\rho(\mathbf{r}')\mathrm{d}\Omega'$ என்னும் சிறு கனவளவு மூலகங்களாகப் பிரிக்கப்பட்டுள்ளது ;



படம் 17

$$V(\mathbf{r})=\int\frac{\gamma\rho(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}\Omega'}{|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}. \tag{37}$$

ஒரு பரப்புப் பரம்பலுககும் ஒரு கோட்டுப பரமபலுக்கும் முறையே

$$V(\mathbf{r})=\int\frac{\gamma\sigma(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}S'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},\quad V(\mathbf{r})=\int\frac{\gamma\lambda(\mathbf{r}')\,\mathrm{d}S'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{38}$$

புள்ளி P யானது பரமபலுககு வெளியே இருக்குமிடத்து, தொகை யீட்டுச் சார்பு முடிவிலியாகுந் தொலலேயில்லே ; ஆனுல், P யானது ஓர் உட்புள்ளியாயிருக்குமிடதது, தொகையீட்டுச் சார்பு முடிவிலியாகும்; தொகை யீட்டுச சார்பின ஒருங்கற்பிரச்சினே எடுதது நோக்கப்படவேண்டும.

ஒரு புள்ளித்திணிவில், V, $\mathbf{F}$ என்னும் இரணடும் முடிவிலிகள். ஒரு கோட்டுப்பரமபலிலும V உம $\mathbf{F}$ உம் பொதுவாக ஒன்றிச்சார்புகள். அடர்த்தி ρ ஆயுளள ஒரு கனவளவுப் பரம்பலுக்குள், உரிய தொகை யீட்டுச சார்புகள் ஒருங்குமு ; V உம $\mathbf{F}$ உம் அபபரம்பலுக்குள்ளும் முடிவுள்ளவையாயும தொடாச்சியுள்ளவையாயும் இருக்கும். பிரிவு 5.6 இலுள்ள சமன்பாடு (32) இனபடி V ஒரு வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் திருப்திப்படுத்துதல் வேணடும். அவ்வகையீட்டுச் சமனபாடு

$$\text{விரி}\;(\text{படி}\;V)+4\pi\gamma\rho=0$$

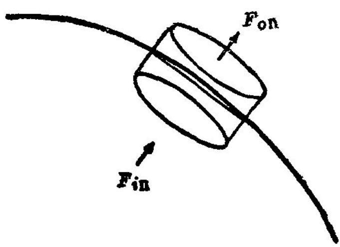
அதாவது

$$\nabla^2V+4\pi\gamma\rho=0. \tag{39}$$

இது புவசோனின் சமன்பாடு.

முடிவுள்ள அடர்த்தி σ ஐயுடைய ஒரு பரப்புப் பரம்பலில், செயலள விலே சடம் பரப்பின்மீது ஒருசிறு தடிப்பிற்குப் பரம்பியிருக்கும் ; அத் தகைப் பரம்பலின் கனவளவடர்த்தி மிகப் பெரிதாகும். ஆகவே, ∇^2V

ஆனது மிகப் பெரிது ; V ஆனது அப்பரப்பின்மீதுள்ள புள்ளிகளில் முடிவுள்ளியாயும் தொடர்ச்சியுள்ளதாயும் இருந்தாலும் $\mathbf{F}$ = படி V என்பது அப்பரப்பின் மீது தொடர்ச்சியில்லாததாகும். F_t ஆனது $\mathbf{F}$ வெளிமுகச் செவ்வனின் வழியேயுள்ள கூறாயின், F_n ஆனது அப் பரப்பின் இரு பக்கங்களிலுந் தொடர்ச்சியுள்ளதாய்க் காணப்படும் ; ஆனால் F_n ஆனது தொடர்ச்சியின்மையை அனுபவிக்கும். தொடர்ச்சியின்மையின் அளவானது dS என்னுங் குறுக்குவெட்டும் நுண்ணளவு உயரமும் $\mathbf{n}$ இன் வழியே அச்சுங் கொண்ட ஒரு சிற்றுருளைக்கு, கவுசின் தேற்றத்தைப் பிரயோகித்தலாற் கணிக்கப்படலாம்.



படம் 18

F_{0n} ஆனது S இன் வெளிப்பக்கத்திலுள்ள செவ்வன் கூறாயிருக்க, F_{in} ஆனது உட்பக்கத்துக் கூறாயிருந்தால், கவுசின் தேற்றம் தருவது

$$F_{on}dS - F_{in}dS = -4\pi\gamma\sigma dS$$

இதிலிருந்து

$$F_{on} - F_{in} = -4\pi\gamma\sigma \qquad (40)$$

அழுத்தச் சார்புபற்றி, V_0 என்பது வெளிப்பிரதேசத்திலுள்ள அழுத்தத்தையும் V_i எனபது உட்பிரதேசத்திலுளளதையுங் குறித்தால்,

$$\frac{\partial V_0}{\partial n} - \frac{\partial V_i}{\partial n} = -4\pi\gamma\sigma. \qquad (41)$$

இங்கு $\frac{\partial}{\partial n}$ என்பது வெளிமுகச் செவ்வனின்வழியே வகையிடலைக் குறிக்கும்.

அழுத்தமான நிலையின் ஒரு சார்பாகத் தரப்பட்டால், அதனை ஆக்கும் பரம்பல் மேலுள்ள தொடர்புகளிலிருந்து பெறப்படலாம்.

V உம் படி V உம் தொடர்ச்சியுள்ளவையெனின், பரப்புப் பரம்பல் இராது. படி V ஆனது தொடர்ச்சியற்றவையெனின, பரம்பல் சமன்பாடு (41) இலிருந்து பெறத்தக்க அடர்த்தி σ ஐயுடைய ஒரு பரப்புப் பரம்பலைக் கொண்டிருக்கும்.

பரப்பின் ஒவ்வொரு பக்கத்திலும் அழுத்தச்சார்பு வேறுவேறு வடிவங்களை எடுக்கும்; ஆனால், இவ்வடிவங்கள் அப்பரப்பின்மீது சம பெறுமானங்களை எடுக்கும். யாதுமொரு புள்ளியிலுள்ள கனவளவடர்த்தி யாதுமொரு புள்ளியிலுள்ள V இலிருந்து

$$\rho=\frac{1}{4\pi}\nabla^2 V$$

என்னுந் தொடர்பினாற் பெறப்படும்.

அழுத்தமானது ஒரு புள்ளியில் முடிவிலியாயிருப்பின், அங்குள்ள திணிவு அப்புள்ளியைச் சுற்றியிருக்கும் ஒரு சிறு கனவளவிற்குக் கவுசின தேற்றத்தைப் பிரயோகித்தலாற் காணப்படலாம். அழுத்தம் ஒரு கோட்டிலுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளிலும் முடிவிலியாயிருப்பின், அடர்த்தி λ ஆனது அக்கோட்டின் வழியேயுள்ள அச்சைக் கொண்ட ஒரு சிற்றுருளைக்குக் கவுசின் தேற்றத்தைப் பிரயோகித்தலாலும் அவ்வுருளையின் குறுக்குவெட்டு மறையுமாறு செய்யப்பட வரும் எல்லையை எடுத்துநோக்குதலாலும் பெறப்படலாம்.

எடுத்துக்காட்டு. $x^2+y^2+z^2-2cz=0$ என்னுங் கோளத்தின் வெளிப் பக்கத்திலும் உட்பக்கத்திலும் அழுத்தம் V_0 ஆலும் V_i ஆலுங் குறிக்கப்பட $V_0=0$ என்றும்

$$V_i=\pi\mu\gamma\,(x^2+y^2+z^2-2cz)$$

என்றுந் தரப்பட்டால், சடத்தின் பரம்பலைக் காண்க.

அழுத்தம் தொடர்ச்சியுள்ளதாகையால், $V=0$ ஆயுள்ள பரப்பாகும்; அதாவது, எல்லை மையம் $(0,\ 0,\ c)$ ஆயும் ஆரை c ஆயுமுள்ள கோளமாகும்.

செவ்வனின் வழியே அலகுக் காவி $\mathbf{n}=\left(\frac{x}{c},\frac{y}{c},\frac{z-c}{c}\right)$.

அக்கோளத்தின் வெளிப்பக்கத்திற் கனவளவடர்த்தி

$$\rho_0=-\tfrac{1}{4}\pi\gamma\,\nabla^2 V_0=0.$$

அக்கோளத்தின் உட்பக்கத்திற் கனவளவடர்த்தி

$$\rho_i=-\frac{1}{4}\pi\gamma\,\nabla^2 V_i=-\frac{3}{2}\mu$$

பரப்பில்

$$\begin{aligned}\sigma&=\frac{1}{4\pi\gamma}\frac{\partial V_i}{\partial n}\\&=\frac{1}{4\pi\gamma}\left(\frac{\partial x}{\partial n}\frac{\partial V_i}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial n}\frac{\partial V_i}{\partial y}+\frac{\partial V_i}{\partial z}\right)\\&=\frac{1}{4\pi\gamma}\left(\frac{x}{c}\frac{\partial V}{\partial x}+\frac{y}{c}\frac{\partial V}{\partial y}+\frac{z-c}{c}\frac{\partial V}{\partial z}\right)\\&=\frac{\mu}{4c}\{2x^2+2y^2+2(z-c)^2\}\\&=\frac{\mu}{2}c.\end{aligned}$$

ஆயின், பரம்பலானது $\frac{1}{2}\mu c$ என்னும் அடர்த்தியையுடைய சீரான பரப்புப் பூச்சோடு, $-3\mu/2$ எனனுங் கனவளவடர்த்தியையுடைய சீரான கோளம் ஒன்றைக் கொண்டுள்ளது.

சடத்தின் பரம்பல் தரப்பட்டால், அழுத்தச் சார்பைத் துணிதற்குப் பரம்பலின் சிக்கற்றன்மையைப் பொறுத்து விசேட முறைகளைப் பயன்படுத்தல் வேண்டும். சிலவேளைகளில், (37) இல் அல்லது (38) இலுள்ள தொகையீட்டின் பெறுமானம் நேரே கணிக்கத் தக்கதாயிருக்கலாம். சிலவகைகளில், முதலில் ஈர்ப்புப்புலம் $\mathbf{F}$ ஆனது கவுசின் தேற்றத்தைப் பிரயோகித்தலாற் பெறப்பட்டு அதன பின்னர் அழுத்தமானது

$$V(P) = \int_{\infty}^{P} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

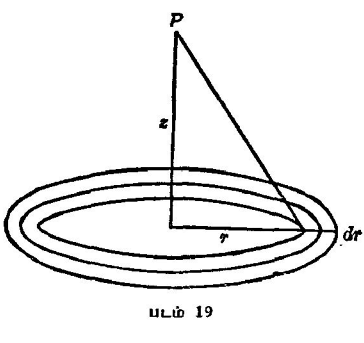
என்பதைப் பயன்படுத்தலாற் பெறப்படலாம்.

வேறுசில வகைகளில், அழுத்தமானது தக்க எல்லை நிபந்தனைகளுக்கு உட்பட்ட புவசோனின் சமன்பாட்டையும் லப்பிளாசின் சமன்பாட்டையுந் தீர்த்தலாற் பெறப்படலாம். வகையீட்டுச் சமன்பாடுகளிலுள்ள மாறிகளின் தொகையை, சமச்சீர்ச்சிந்திப்புக் குறைக்குமிடத்து இது விசேடமாக இவ்வாறு இருக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு 1. ஆரை a உம் பரப்படர்த்தி σ உம் உள்ள சீரான வட்டத் தட்டு ஒன்றின் அழுத்தம் அத்தட்டிலிருந்து z என்னுந் தூரத்தில் அதன் அச்சிலுள்ள ஒரு புள்ளி P யில்,

$$2\pi\gamma\sigma\{\sqrt{(z^2+a^2)}-z\}$$

எனக் காட்டுக.



படம் 19

அடர்த்தி ρ உம், அரையுச்சிக் கோணம் α உம், உயரம் h உம் ஆயுள்ள சீரான திண்ம நேர்வட்டக் கூம்பொன்றின் உச்சியில் அழுத்தத்தைக் காண்க.

அத்தட்டை வட்ட வளையங்களாகப் பிரிக்க.

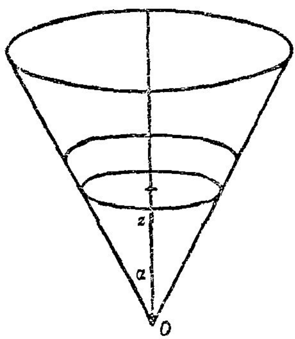
ஆரை r உம் தடிப்பு dr உம் உள்ள வட்டவளையத்திற்குத் திணிவு $2\pi r dr\sigma$; P யில் அதன் அழுத்தம

$$\gamma 2\pi r dr\sigma/\sqrt{(r^2+z^2)}.$$

ஆயின், முழுத் தட்டுங் காரணமாக,

$$V=2\pi\gamma\sigma\int_0^a \frac{r\,dr}{\sqrt{(r^2+z^2)}}=2\pi\gamma\sigma\,[\sqrt{(a^2+z^2)}-z].$$

அகக்கூம்பின் உச்சியில் அழுத்தமானது அக்கூம்பைச் சமாந்தரமான வட்டத் தட்டுக்களாகப் பிரித்தலாற் பெறப்படலாம். உச்சியிலிருந்து z என்னுந்



படம் 20

தூரத்திலுள்ள தட்டுக்கு ஆரை z தான் α ஆயும் தடிப்பு dz ஆயும், பரப்படர்த்தி ρdz ஆயும் இருக்கும். O வில் அத்தட்டின் அழுத்தம்

$$2\pi\gamma\rho dz\,[z \text{ சீக } \alpha - z].$$

ஆயின், O வில் அக்கூம்பின் அழுத்தம்

$$V=\int_0^h 2\pi\gamma\rho\,(\text{சீக } \alpha-1)\,z\,dz,$$

$$=\pi\gamma\rho h^2\,(\text{சீக } \alpha-1).$$

எடுத்துக்காட்டு 2. அடர்த்தி ρ உம் ஆரை a உம் ஆயுள்ள சீரான திண்மக் கோளம் ஒன்று காரணமாக எல்லாப் புள்ளிகளிலுமுள்ள கவர்ச்சியையும் அழுத்தத்தையுங் கவுசின் தேற்றத்தைப் பயன்படுத்திக் காண்க.

இங்கு, கோளச் சமச்சீர் உண்டு. P யில் புலம் ஆரைத் திசையையுடையது ; அது r இன் சார்பு மாத்திரமாயுள்ளது. P ஆனது ஓர் உட்புள்ளியெனக் கொள்க. மையம் O உம் ஆரை a உம் ஆயுள்ள ஒரு கோணத்திற்குக் கவுசின் தேற்றத்தைப் பிரயோகிக்க,

$$F4\pi r^2=-4\pi\gamma\cdot\tfrac{4}{3}\pi r^3\rho,$$

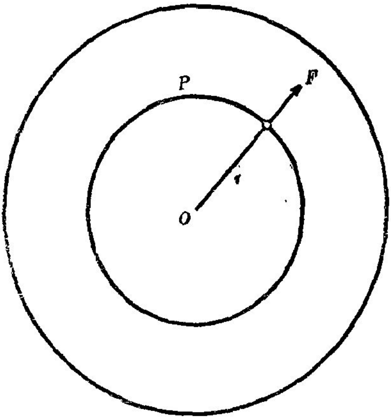
ஆயின்,

$$F=-\tfrac{4}{3}\pi\gamma\rho r.$$

P ஆனது ஒரு வெளிப் புள்ளியெனின், கவுசின் தேற்றத்தின்படி

$$F.4\pi r^2 = -4\pi\gamma \cdot \tfrac{4}{3}\pi a^3\rho\ ;$$

அதாவது, $$F = -\frac{4}{3}\pi\gamma a^3\rho/r^2.$$



படம் 21

V_0 ஆனது ஒரு வெளிப் புள்ளியிலுள்ள அழுத்தமாயும் V_i ஆனது ஓர் உட்புள்ளியிலுள்ள அழுத்தமாயும் இருநதால்,

$$\frac{dV_o}{dr} = F = -\frac{\tfrac{4}{3}\pi\gamma a^3\rho}{r^2}$$

தொகையிட,

$$V_o = \tfrac{4}{3}\pi\gamma a^3\rho\frac{1}{r} + C.$$

$V_o \to 0$, ஆக, $r \to \infty$, $C = 0$ ஆதலால்,

$$\frac{dV_i}{dr} = -\tfrac{4}{3}\pi\gamma\rho r.$$

தொகையிட,

$$V_i = -\tfrac{2}{3}\pi\gamma\rho r^2 + D,$$

$r = a$ ஆக, $V_o = V_i$.

$$\tfrac{4}{3}\pi\gamma a^2\rho = -\tfrac{2}{3}\pi\gamma\rho a^2 + D, \qquad D = 2\pi\gamma a^2\rho.$$

எனின், $$V = \tfrac{4}{3}\pi\gamma\rho a^3/r \quad r > a.$$

$$= \tfrac{2}{3}\pi\gamma\rho\,(3a^2 - r^2) \quad r < a.$$

எடுத்துக்காட்டு 3. $V = f(r)$ கோசை θ

என்பது r, θ, ϕ என்னும் கோண முனைவாள்கூறுகளில் லப்பிளாசின் சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வாயின், A, B என்பன மாறிலிகளாயிருக்குமிடத்து

$$f(r) = Ar + \frac{B}{r^2}.$$

எனக் காட்டுக.

$r = a$ ஆகிய கோளத்தின்மீது ஒரு பரப்புப் பரம்பலுக்கு அடர்த்தி k கோசை θ; இங்கு k என்பது ஒரு மாறிலி. அக்கோணத்தின் உட்பக்கத்திலும் வெளிப்பக்கத்திலும் அழுத்தங்கள் $f(r)$ கோசை θ என்னும் வடிவத்தில் உள்ளனவெனத் தரப்பட்டால் எல்லாப் புள்ளிகளிலும் அழுத்தத்தைத் துணிக.

கோள முனைவாள்கூறுகளில் லப்பிளாசின் சமன்பாடு

$$\frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V}{\partial r}\right)+\frac{1}{\text{சைன}\ \theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{சைன்}\ \theta\frac{\partial V}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\text{சைன்}^2\ \theta}\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2}\right]=0.$$

$V = f(r)$ கோசை θ எனபது ஒரு தீாவெனின,

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\ \text{கோசை}\ \theta\right)+\frac{1}{\text{சைன}\ \theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left[-\text{சைன்}^2\,\theta f(r)\right]=0,$$

கோசை θ ஆற் பிரிக்க,

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{df}{dr}\right)-2f=0.$$

$r = e^t$ ஆகுமிடத்து மாறி r இலிருந்து t இற்கு மாற்றினுேமாயின் சமன்பாடு

$$\frac{d^2f}{dt^2}+\frac{df}{dt}-2f=0.$$

ஆகும்.

இது மாறுக குணகங்களோடு கூடிய ஒரு நேர்கோட்டுச் சமன்பாடு. துணைச சமனபாடு

$$\lambda^2+\lambda-2=0.$$

இதன் மூலங்கள் 1, -2 எனபன. எனின,

$$f = Ae^t + Be^{-2t} = Ar + \frac{B}{r^2}.$$

பின்வரும நிபந்தனைகளைத திருப்திப்படுத்துதற்கு V_o, V_i என்பண துணியப்படல் வேண்டும்.

(1) V_o, V_i என்பனவற்றிற்கு $f(r)$ கோசை θ என்னும வடிவம் உண்டு.

(2) $\nabla^2 V_o = 0$, $a <$ எலலா r இற்கும், $\nabla^2 V_i = 0$, $a >$ எல்லா r இற்கும்.

(3) $V_o \to 0$, $r \to \infty$ ஆக.

(4) V_o, V_i என்பன எங்கும் முடிவுள்ளவை.

(5) $V_o = V_i$, $r = a$ ஆகுமிடத்து.

(6) $\dfrac{\partial V_o}{\partial r} - \dfrac{\partial V_i}{\partial r} = -4\pi\gamma\sigma$, $r = a$ ஆகுமிடத்து.

(1) இலிருந்து

$$V_o = \left(Ar + \frac{B}{r^2}\right) \text{கோசை } \theta \quad r > a,$$

$$V_i = \left(Cr + \frac{D}{r^2}\right) \text{கோசை } \theta \quad r < a.$$

(3) இலிருந்து

$$A = 0.$$

(4) இலிருந்து

$D = 0$, அழுத்தமானது உற்பத்தியில் முடிவுளியாயிருத்தல் வேண்டுமாதலால்.

(5) இலிருந்து

$$\frac{B}{a^2} \text{கோசை } \theta = Ca \text{ கோசை } \theta, \text{ அதாவது } B = Ca^3.$$

(6) இலிருந்து

$$-\frac{2B}{a^3} \text{கோசை } \theta - C \text{ கோசை } \theta = -4\pi\gamma\sigma = -4\pi\gamma k \text{ கோசை } \theta.$$

இதிலிருந்து $\quad 2B + Ca^3 = 4\pi\gamma k a^3.$

இவ்வாறு $\quad B = Ca^3 = \frac{4}{3}\pi\gamma k a^3.$

எனின்,

$$V_o = \tfrac{4}{3}\pi\gamma k a^3 \frac{\text{கோசை } \theta}{r^2}, \quad r > a,$$

$$V_i = \tfrac{4}{3}\pi\gamma k r \text{ கோசை } \theta \quad r < a.$$

5.8. சமவழுத்தப் பரப்புக்கள்

$V\ (x, y, z) =$ **மாறிலி** என்னும் பரப்புக்கள் ஒரு பரப்பினம்; ஒவ்வொன்றிலும் அழுத்தம மாறிலியாகும். யாதுமொரு புள்ளி P யில் அதற்கூடாகச செல்லும் ஒரு சமவழுத்தப்பரப்பு மாத்திரம் உண்டு. P யில் புலக்காவி $\mathbf{F}$ ஆனது இச்சமவழுத்தப் பரப்புக்குச் செவ்வன்; பொதுவாக, விசைக் கோடுகள் சமவழுத்தப் பரப்புக்களை நிமிர்கோணத்தில் வெட்டும்.

$$f\ (x, y, z) = \text{மாறிலி} \tag{42}$$

என்னுந் தந்த ஒரு பரப்பினம் சுயாதீன வெளியில் அமையத் தக்க சமவழுத்தத் தொகுதி ஒன்றுதற்குரிய நிபந்தனையை ஆராய்தல் நன்று.

இந்நிபந்தனை திருப்திப்படுமிடத்து f ஆனது மாறிலியாகும்பொழுதெல்லாம் V ஆனது மாறிலி ; எனின், அவற்றினிடையே ஒரு சார்புத் தொடர்பு உண்டு ; அதனை

$$V=\psi\{f(x,y,z)\} \tag{43}$$

என நாம் எழுதலாம். ஆயின்,

$$\frac{\partial V}{\partial x}=\psi'(f)\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}=\psi''(f)\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\psi'(f)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\nabla^2 V=\psi''(f)\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2\right\}+\psi'(f)\nabla^2 f$$

சுயாதீன வெளியில, $\nabla^2 V=0$ ஆகையால,

$$\frac{\nabla^2 f}{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}=-\frac{\psi''(f)}{\psi'(f)}=f \text{ இன் ஒருசார்பு, } G(f) \text{ எனக.} \tag{44}$$

ஆயின, வேணடிய நிபநதனை

$$\nabla^2 f/|\text{படி} f|^2$$

என்பது $f\ (x,\ y,\ z)$ எனபதன் ஒரு சார்பு மாத்திரமாய் உணர்த்தப்படத் தக்கதாய இருத்தல் வேண்டும். இந்நிபந்தனை திருபதிப்படுமிடத்து, அழுத்தச் சார்பு

$$\frac{\psi''(f)}{\psi'(f)}=-G(f)$$

என்பது தொகையிடலாற் பெறப்படலாம்.

இவ்வாறு $\quad$ மட $\psi'(f)=C-\int G(f)\,\mathrm{d}f.$

அல்லது $\quad \psi'(f)=B$ அடு $\left\{-\int G(f)\,\mathrm{d}f\right\}$

ஆயின், $\quad V=\psi(f)=B\int$ அடு $\left\{-\int G(f)\,\mathrm{d}f\right\}\mathrm{d}f+C. \quad (45)$

எடுத்துக்காட்டு. c மாறிலியாயும் λ மாறியாயுமிருக்குமிடத்து

$$x^2+y^2+2\lambda x+c^2=0$$

என்னும் ஓரச்சு உருளைத் தொகுதியானது சுயாதீன வெளியிற் சமவழுத்தப் பரப்புத் தொகுதி ஒன்றை ஆக்கலாமெனக் காட்டுக ; அழுத்தச் சார்பையுந் துணிக.

பரப்புக்களின் சமனபாட்டைப் பின்வரும் வடிவததில் எழுதுக :

$$f(x,y,z)=\frac{x^2+y^2+c^2}{x}=\text{மாறிலி.}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=1-\frac{y^2+c^2}{x^2},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{2\,(y^2+c^2)}{x^3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{2y}{x},\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{2}{x}.$$

$$\frac{\nabla^2 f}{|\text{படி}\,f\,|^2}=\frac{\dfrac{2\,(y^2+c^2)}{x^3}+\dfrac{2}{x}}{\left(1-\dfrac{y^2+c^2}{x^2}\right)^2+\dfrac{4y^2}{x^2}}$$

$$=\frac{2f}{f^2-4c^2}.$$

எனின், நிபந்தனை திருப்திப்பட்டுள்ளது. இனி

$$\frac{\psi''(f)}{\psi'(f)}=-\frac{2f}{f^2-4c^2}.\quad \text{மட}\ \psi'(f)=A-\text{மட}\ (f^2-4c^2).$$

$$\psi(f)=\frac{B}{f^2-4c^2}=\frac{B}{4c}\left[\frac{1}{f-2c}-\frac{1}{f+2c}\right].$$

$$V=\psi\,(f)=C\ \text{மட}\ \frac{f-2c}{f+2c}+D$$

$$=C\ \text{மட}\ \frac{(x-c)^2+y^2}{(x+c)^2+y^2}+D.$$

5.9. இறீனின் தேற்றங்கள்

ϕ, ψ என்பன தொடர்ச்சியான முதற் பெறுமதியோடும் இரண்டாம் பெறுமதியோடுங் கூடிய தொடர்ச்சியான இரண்டு ஒன்றிப் பெறுமானச் சார்புகளாயிருக்க, Ω என்பது ஒரு மூடிய பரப்பு S இனால் எல்லையுற்ற கனவளவெனின்,

$$\int_\Omega(\phi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\phi)\,d\Omega=\int_S\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)dS \tag{46}$$

$$\int_\Omega\{\phi\nabla^2\phi+(\text{படி}\ \phi)^2\}d\Omega=\int_S\phi\frac{\partial\phi}{\partial n}dS. \tag{47}$$

$$\text{விரி}\ (\phi\mathbf{A})=\phi\ \text{விரி}\ \mathbf{A}+(\text{படி}\ \phi).\mathbf{A}$$

என்னுந் தொடர்பில் $\mathbf{A}=$ படி ψ என எடுக்க,

$$\text{விரி}\ (\phi\ \text{படி}\ \psi)=\phi\nabla^2\psi+(\text{படி}\ \phi).\ (\text{படி}\ \psi). \tag{48}$$

ϕ ஐயும் ψ ஐயும் ஒன்றேடொன்று மாற்றுச்செய்ய

$$\text{விரி}\,(\psi\ \text{படி}\ \phi)=\psi\nabla^2\phi+(\text{படி}\ \psi).\ (\text{படி}\ \phi). \qquad (49)$$

(48) இலிருந்து (49) ஐக் கழிக்க,

$$\text{விரி}\,(\phi\ \text{படி}\ \psi-\psi\ \text{படி}\ \phi)=\phi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\phi.$$

கனவள்வு Ω இன்மீது தொகையிட, வலக்கைப்பக்கம் தருவது

$$\int_\Omega(\phi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\phi)\,d\Omega,$$

இடக்கைப் பக்கந் தருவது

$$\int_\Omega \text{விரி}\,(\phi\ \text{படி}\ \psi-\psi\ \text{படி}\ \phi)\,d\Omega,$$

இது கவுசின் உருமாற்றத்தால்

$$\int_S(\phi\ \text{படி}\ \psi-\psi\ \text{படி}\ \phi)_n\,dS$$

அதாவது
$$\int_S\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)dS$$

என்னும் பரப்புத் தொகையீடாக மாற்றப்படக் கூடும் எனின், கிறீனின் தேற்றத்தின முதல் வடிவம் என்று கூறும் சமன்பாடு (46) ஐப் பெறுவோம்.

சமன்பாடு (48) இல் $\psi=\phi$ எனப் பிரதியிட்டுக் கனவளவு Ω வின் மீது தொகையிட, வலப்பக்கந் தருவது

$$\int_\Omega\{\phi\nabla^2\phi+(\text{படி}\ \phi)^2\}\,d\Omega$$

கவுசின் உருமாற்றத்தால் ஒரு பரப்புத் தொகையீடாக உருமாறிய பின் இடக்கைப்பக்கந் தருவது

$$\int_S\phi\frac{\partial\phi}{\partial n}dS$$

எனின், கிறீனின் தேற்றத்தின் இரண்டாம் வடிவமாகிய சமன்பாடு (47)ஐப் பெறுவோம்.

கிறீனின் தேற்றத்தின் இவ்வடிவங்கள் இரண்டும் அழுத்தக் கொள்கையில் மிக்க பயன அளிக்கும் ; குறிப்பாக, அழுத்தச் சார்புகளைப் பற்றிப் பல பொது முடிபுகளை நிறுவுதற்குப் பயன்படும. உதாரணமாக, இரண்டாம் வடிவம், சில நிபந்தனைகளைத் திருப்திப்படுத்த வேண்டுமிடத்து ஒருதனியான அழுத்தச்சார்பொன்று உண்டென நிறுவுதற்குப் பயன்படும்.

ஒரு கனவளவுப் பரம்பலுக்குக் கவுசின் தேற்றம் $\phi=1$ என்றும் ψ ஐ அழுத்தச் சார்பு V என்றும் எடுப்பதால் கிறீனின் தேற்றத்தின் முதல் வடிவத்திலிருந்து பெறப்படலாம். அப்போது $\nabla^2\phi=0$, $\nabla^2\psi=\nabla^2 V = -4\pi\gamma\rho$; சமன்பாடு தருவது

$$\int_\Omega(-4\pi\gamma\rho)\ d\Omega=\int_S\frac{\partial\psi}{\partial n}dS;$$

அதாவது

$$-4\pi\gamma\int_\Omega\rho d\Omega=\int_S F_n\ dS.$$

கிறீனின் தேற்றத்தின் முதல் வடிவத்திலிருந்து பெறத்தக்க வேறொரு தேற்றம் **கிறீனின் நிகர்மாற்றுத் தேற்றம்** எனப்படும்; இதனை முடிவுளிக் கனவளவுப் பரம்பல்களுக்குப் பின்வரும் வடிவத்தில் நாம் கூறலாம்.

அடர்த்தி ρ ஆயுள்ள ஒரு கனவளவுப் பரம்பல் ஓர் அழுத்தச் சார்பு V ஐ ஆக்க, அடர்த்தி ρ' ஆயுள்ள இரண்டாம் பரம்பல் ஒன்றுக்கு அழுத்தம் V' உண்டெனின்,

$$\int_\Omega\rho V'\ d\Omega=\int_\Omega\rho' V\ d\Omega. \tag{50}$$

$\phi=V$ என்றும் $\psi=V'$ என்றுங் கொள்க. அப்போது $\nabla^2\phi=-4\pi\gamma\rho$, $\nabla^2\psi=-4\pi\gamma\rho'$. R ஆனது முடிவிலியை அணுகுமிடத்து ஆரை R ஆயுள்ள முடிவிலிக் கோளம் Σ ஆல் வரைப்புறும் முழு வெளிக்கும் கிறீனின் தேற்றத்தின் முதல் வடிவத்தைப் பிரயோகிக்க.

அப்போது கனவளவுத் தொகையீடு

$$\int_\Omega\{V(-4\pi\gamma\rho')-V'(-4\pi\gamma\rho)\}\,d\Omega$$
$$=-4\pi\gamma\left[\int\rho' V\ d\Omega-\int\rho V'\ d\Omega\right].$$

பரப்புத் தொகையீடு மறையும்; அதற்குக் காரணம், அம்முடிவிலிக் கோளத்தின்மீது V, V' என்பனவற்றுள் ஒவ்வொன்றும் $1/R$ என்னும் வரிசையையுடையது; $\partial V/\partial n, \partial V'/\partial n$ எனபன $1/R^2$ என்னும் வரிசையையுடையன; dS ஆனது $R^2 d\omega$ என்னும் வரிசையையுடையது; இங்கு ω ஆனது ஒரு திண்மக் கோணம். எனின், பரப்புத் தொகையீடு $1/R$ என்னும் வரிசையையுடையது; அது R ஆனது முடிவிலியை அணுகும் எல்லையில் மறையும். எனின், கிறீனின் தேற்றத்திலிருந்து சமன்பாடு (50) ஐ நாம் பெறுவோம்.

இரு புள்ளித் திணிவுத் தொகுதிகளுக்கு (50) உடனுன ஒப்புமையால்

$$\Sigma mV'=\Sigma m'V \tag{51}$$

என்பது காணப்படும்.

ஆனல், இதனை நிறுவுதற்கு, V, V' என்பன தொடர்ச்சியின்றிய வெளிப் பிரதேசங்களுக்குக் கிறீனின் தேற்றத்தை விரிக்கவேண்டிவரும்.

பயிற்சி V

1. X, Y, Z எனனும் விசைகள்

$$y=0,\ z=c\ ,\ z=0,\ x=a\ ;\ x=0,\ y=b$$

எனனும் சமன்பாடுகளாலே தரப்படும் மூன்று கோடுகளின் வழியே தாக்குகின்றன ; **சமான** முறுக்கியின் புரியிடை

$$(aYZ+bZX+cXY)/(X^2+Y^2+Z^2)$$

என நிறுவுக. அம்முறுக்கி ஒரு தனி விசையாய் ஒடுங்கினால், அவ்விசையின் தாக்கக்கோடு

$$(x-a)\ (y-b)\ (z-c)-xyz=0$$

எனனும் அதிபரவளைவுருவின் மீது கிடத்தல் வேண்டுமெனக் காட்டுக.

2. ஒரு நான்முகியின் OA, OB, OC எனனும் மூன்று விளிம்புகள் நீளத்திற் சமமாயும் ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தாயும் அவ்வொழுங்கில் வலக்கைப்பக்கமான தொடர்புள்ளனவாயும் இருக்கின்றன ; D என்பது AB யின் நடுப்புள்ளி ; OD ஆனது p என்னும் நீளமுடையது. முறையே $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{OC}$ என்பனவற்றில் இடப்படுத்திய விசைகள் P, Q என்பனவற்றுக்குச் சமானமான விசைத் தொகுதியானது λP, λQ எனனும் இணைகளோடு கூடி

$$\lambda = -pPQ/(P^2+Q^2)$$

எனனும் ஒரு தனி விசைக்குச் சமானமானது எனக் காட்டுக.

OD ஐ $P^2 : Q^2$ எனனும் விகிதத்திற் பிரிக்கும் புள்ளியில், செங்கோணங்களில் அவ்விசை OD ஐ வெட்டுமென்றுங் காட்டுக.

[London S. 1957]

3. ஒரு விசை P ஆனது $x^2/a^2+y^2/b^2-z^2/c^2=1$ எனனும் அதிபரவளைவுருவின்

$$\frac{x-a\ \text{கோசை}\ \theta}{a\ \text{சைன்}\ \theta}=\frac{y-b\ \text{சைன்}\ \theta}{-b\ \text{கோசை}\ \theta}=\frac{z}{c}$$

எனனும் ஒரு பிறப்பாக்கியின் வழியே தாக்குகின்றது. அவ்வதிபரவளைவுருவின் அச்சுக்கள் பற்றி, இணையின் கூறுகளையும் அதன் விசையையுங் காண்க.

P எனனும் விசையும் X, Y, Z எனனும் விசைக் கூறுகளையுடைய தந்த ஒரு விசை Q உம் θ இன் எல்லாப் பெறுமானங்களுக்கும் ஒரு தனி விசையாக ஒடுங்கினால்,

$$X^2/a^2+Y^2/b^2-Z^2/c^2=0$$

என நிறுவுக.

[Ceylon S. 1943]

4.

$$\mathbf{r}=\mathbf{a}u^3+\mathbf{b}u^2+\mathbf{c}u+\mathbf{d}$$

எனனும் வளையிக்கு உற்பத்திக்கூடாகச் செல்லும் கொஞ்சு தளங்களுள்ள மூன்று புள்ளிகள் உண்டென்றும் அவை

$$[\mathbf{r}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]=3\,[\mathbf{r}, \mathbf{a}, \mathbf{d}]$$

எனனும் தளத்தில் உள்ளனவென்றுங் காட்டுக.

[Oxford II 1957]

5. $\mathbf{r}$ ஆனது ஒரு திருகிய வளையி Γ இன் ஒரு மாறும் புள்ளி P யின் நிலைக்காவியாகுக : $\mathbf{n}$ ஆனது Γ இற்குத் தலைமைச் செவ்வன் ஆகுக ; $\mathbf{K}$ ஆனது P யில் Γ இன் வளைவாகுக. Γ_1 ஆனது

$$\mathbf{r}_1=\mathbf{r}+\mathbf{K}^{-1}\mathbf{n}$$

எனனும் நிலைக்காவிகளோடு புள்ளிகள் P_1 இன ஒழுககெளின ஒத்த புளளிகள P, P_1 இல் Γ, Γ_1 இறகு வரையபபடுந் தொடலிகள ஒனறுககொன்று செங்குத்தாகுமெனக காட்டுக.

K ஆனது மாறலி எனின Γ_1 இன வளைவு K_1 உம் ஒத்த புள்ளிகளில Γ, Γ_1 எனபனவற்றின முறுக்கிகளின பெருககம $\tau\tau_1$ உம் மாறிலிகள எனக காட்டுக.

Γ ஆனது θ எனனும் பரமாணம் பற்றி

$$\mathbf{r} = (\text{கோசை } \theta, \text{ சைன } \theta, \theta \text{ கோதா } \beta)$$

என்பதாலே தரப்படின K, τ, τ_1 எனபனவற்றைக காணக.

[London S. 1960]

6. ஒரு புளளி O ஆனது ஒரு திருகியவளையி வழியே வேகம $\mathbf{v}$ ஒடு இயங்குகினறது ; O இல அவ்வளையியின தலைமையச்சுக்கள பற்றி P இன ஆள்கூறுகள ξ, η, ζ இயங்கும். அச்சுககளுக்குச் சமாந்தரமான P இன வேகஙகள

$$v + \xi - \frac{\eta v}{\rho},\ \dot{\eta} - \frac{\xi v}{\sigma} + \frac{\xi v}{\rho},\ \zeta + \frac{\eta v}{\sigma}$$

என்பனவெனக காட்டுக ; இங்கு, ρ, σ எனபன வளைவாரையும முறுககல் ஆரையும.

ρ ஆனது தலைமைச செவவன வழியே O இலிருந்து ஒரு மாருத தூரம் c இல கிடந்தால்,

$$\sigma^2\rho = c\,(\rho^2 + \sigma^2)$$

ஆகுமிடத்து, OP ஆனது P இன ஒழுககுகளுககு இருமைச் செவவனுருமென நிறுவுக.

[Camb. M. T.(1919)]

7. காவி $\mathbf{F}$ ஒரு விறைப்பான சட்டப்படலின ஓர் உறுப்பைச சட்டுகினறது. அச்சட்டப்படல் இப்பொழுது ஒரு கோணம α ஊடாக அலகுக் காவி $\mathbf{i}$ இன வழியே ஓர் அச்சைப்பற்றிச் சுழற்றப் படுகினறது. $\boldsymbol{\omega} = 2\mathbf{i}$ தான் $\frac{1}{2}\alpha$ ஆகுமிடத்து

$$\mathbf{G} - \mathbf{F} = \{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{F} + \tfrac{1}{2}\,\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{F} \times \boldsymbol{\omega})\}/(1 + \tfrac{1}{4}\omega^2)$$

எனபதாலே தரபபடும $\mathbf{G}$ ஆக $\mathbf{F}$ ஆனது மாற்றப்படுமெனக் காட்டுக.

[Camb. P.N.S. 1956]

8. ஒரு புள்ளி P இன நிலைக்காவி $\mathbf{x}$ ஆனது

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{x}}$$

எனனும் வகையீட்டுச சமனபாட்டைத திருப்திப்படுத்துகினறது : இங்கு, $\boldsymbol{\omega}$ ஆனது ஒரு நிலையான காவி. P ஆனது ஒரு நிலையான கோளத்தின மீதும ஒரு நிலையான தளத்தின மீதும் கிடக்குமெனக் காட்டுக.

P ஆனது ஒரு வட்டத்தில இயங்குமென உய்த்தறிக : அது அவ்வட்டத்தை மாருக்கதியோடு வரையுமெனறுங் காட்டுக. அவ்வட்டம வரையப்படும் கோணவேகத்தைக காணக.

[Camb P. N. S. 1956]

9. தனது சொந்தத தளத்தில ஒரு தட்டின இயக்கம ஒரு குறித்த கணத்தில அத்தட்டிலே ஒரு புளளி P இன வேகம $\mathbf{V}$ ஆலும் P பற்றிய அதன கோணவேகம் $\boldsymbol{\omega}$ ஆலும குறிததுச சொல்லப்பட்டுளளது. P தொடர்பாக கணநிலை மையம I இன சார்நிலைக்காவி $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V})/\omega^2$ என நிறுவுக.

தனது சொந்தத தளத்தில இயங்கும ஒரு வட்டத்தட்டு கோணவேகம $\boldsymbol{\omega}$ ஒடு இறங்குகினறது அபபோது அதன மையம C கோணவேகம் $\boldsymbol{\Omega}$ ஒடு மையம O உம ஆரை R உம உள்ள ஒரு வட்டத்தை வரைகினறது. O தொடர்பாக C யின நிலைக்காவி $\mathbf{R}$ ஆகுமிடத்து, கணநிலை

$(1-\Omega/\omega)\mathbf{R}$ எனக் காட்டுக. ஆயின் Ω/ω என்பது மாறிலியாகுமிடத்து வெளிமைய வொழுக்கையும் பொருண்மையவொழுக்கையும் (தட்டின் மீதும் வெளியிலும் I இன் ஒழுக்குக்கள்) காண்க.

[Camb. M. T. 1954]

10. ஒரு விறைப்பான பொருள் S இற்குக் கறங்கு $\boldsymbol{\omega}$ உண்டு; S இன் ஒரு துணிக்கை A இற்கு வேகம் $\mathbf{v}$ உண்டு. ω இற்குச் சமாந்தரமான வேகக்காவியோடுள்ள S இன் ஒவ்வொரு துணிக்கை P உம்

$$\overrightarrow{AP}=\frac{\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v}}{\omega^2}+\mu\boldsymbol{\omega}$$

என்னுங் கோட்டிற் கிடக்குமெனக் காட்டுக; இங்கு μ ஆனது ஓர் எதேச்சை எண்.

ஒரு விறைப்பான பொருளின் $(a, 0, 0)$, $(0, a/\sqrt{3}, 0)$, $(0, 0, 2a)$ என்னும் புள்ளிகளிலுள்ள துணிக்கைகளின் கணவேகங்கள் ஒரு செங்கோணத்தைக் காட்டின சட்டம் பற்றிய முறையே $(u, 0, 0)$, $(u, 0, v)$, $(u+v, -v\sqrt{3}, v/2)$ என்பன. அப்பொருளின் கறங்கின் பருமன் திசைகளையும் மையவச்சானது தளத்தை வெட்டும் புள்ளியையுங் காண்க. [London S. 1959]

11. இரண்டு நேர் வட்டக்கூம்புகள் ஒரே உச்சி O ஐயும் ஒரேயச்சு OX ஐயும் α, β $(\beta>\alpha)$ என்னும் அரையுச்சிக் கோணங்களையும் உடையன. அவை முறையே கோணவேகங்கள் ω, Ω என்பனவற்றோடு OX பற்றிச் சுழலுகின்றன; மையம் C ஆயுள்ள ஒரு கோளம் அக்கூம்புகளுக்கு இடையிலுள்ள வெளியில் நழுவாது உருளுகின்றது. தளம் COX ஆனது

$$(\omega \text{ சைன் } \alpha+\Omega \text{ சைன் } \beta)/(\text{சைன் } \alpha+\text{சைன் } \beta)$$

என்னுங் கோண வேகத்தோடு சுழல்கின்றதைக் காட்டுக.

12. ஒரு விறைப்பான பொருளுக்கு

$$y=a,\ z=-a\ ;\ z=a,\ x=-a\ ,\ x=a,\ y=-a$$

என்னுங் கோடுகள் பற்றி ஒருங்கமைந்த கோணவேகங்கள் உண்டு. விளையுள்-திருகியக்கத்துக்குப் புரியிடை a எனின், அதன் அச்சு

$$x+y+z=0$$

என்னுந் தளத்திற் கிடக்குமெனக் காட்டுக.

13. அலகு நீளத்திற்குத் திணிவு λ உம் நீளம் $2a$ உம் உள்ள சீரான ஒரு கோல் AB இன் P இலுள்ள அழுத்தம்

$$\gamma\lambda \text{ மட } \frac{r+r'+2a}{r+r'-2a}$$

எனக் காட்டுக; இங்கு $r=AP$, $r'=BP$.

சமவழுத்தப் பரப்புக்கள் ஒரு கோளப்போலியினம் எனக் காட்டுக.

14. a என்னும் ஆரையையுடைய வட்டவுருளையின் அடரத்தி அதன் உச்சியிலிருந்து r என்னுந் தூரத்தில் $k\sqrt{(a^2-r^2)}$; M ஆனது அவ்வுருளையின் ஒவ்வோரலகுத் தூரத்திற்குமுள்ள திணிவு, ஓர் உட்புள்ளியிற் கவர்ச்சி

$$\frac{2\gamma M}{a^3 r}\left[a^3-(a^2-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]$$

ஆகுமெனக் காட்டுக; வெளிப்புள்ளிகளிலுள்ள கவர்ச்சியையுங் காண்க.

15. $r=\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$ ஆயும் C என்பது ஒரு மாறிலியாயும் இருக்குமிடத்து சர்ப் பழுத்தம்

$$V=Cx.\quad r<a$$
$$=\frac{Ca^3x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\qquad r>a.$$

ஆயின், பரம்பலைக் காண்க.

16. $r=\sqrt{(x^2+y^2+z^2)}$ ஆயிருக்குமிடத்து,

$$V=\tfrac{4}{3}\pi\gamma\rho\left[\frac{2a}{r}+\frac{a^5}{5r^5}(2z^2-x^2-y^2)\right],\qquad r>a$$
$$=\tfrac{4}{3}\pi\gamma\rho\left[\tfrac{5}{2}a^2-\tfrac{1}{2}r^2+\tfrac{1}{5}(2z^2-x^2-y^2)\right],\qquad r<a$$

எனின, சடத்தின பரமபலைக் காண்க.

17. அச்சுக்கள் செஙகோணவச்சுககளாக, K, a என்பன மாறிலிகளாயிருக்க $x+y+z=a$ எனனுந தளங்களாலும ஆள்கூற்றுத தளஙகளாலும் எல்லையுற்ற நான்முகிகுள்ளே எல்லாப் புள்ளிகளிலும

$$Kxyz\,(a-x-y-z)$$

எனனும் அழுததத்தை என்ன கனவளவு பரப்புச் சடப் பரமபல்கள் தருமென்று துணிக; அநநானமுகிககு வெளிப்பக்கத்திலுள்ள எல்லாப புள்ளிகளிலும் என்ன கனவளவு பரப்புச சடப் பரமபலகள் பூச்சிய அழுததததைத் தருமென்றுந துணிக.

அந்நானமுகிக்கு உள்ளேயுள்ள சடததின் மொத்தத திணிவு $Ka^5/80\pi\gamma$ என்று காட்டுக.

[London S. 1938]

18. r, θ, z எனபன உருளையாள்கூறுகளாயிருகக, λ ஆனது ஒரு மாறியாயிருககுமிடதது $f(r,\ \theta)=\lambda$ எனனுஞ் சமனபாடு சுயாதீன வெளிகளுளள சமவழுத்தப பரப்புககளின் ஓர் இனத்தைக குறிககினறது.

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}\right]\Big/\left[\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)^2\right]$$

என்பது λ இன சார்பு மாத்திரமாயுளளதென நிறுவுக.

r, θ, z எனபன உருளையாளகூறுகளாயிருககுமிடதது,

$$r^8+a^8-2a^4r^4\text{ கோசை }4\theta=\lambda$$

என்னும் பரப்புத் தொகுதி சமவழுததப் பரப்புத தொகுதி ஒன்றை ஆக்ககூடுமென்றும், A, B என்பன எதேச்சையான மாறிலிகளாயிருககுமிடதது ஒத்த அழுததச சாபு

$$V=A\text{ மட }\lambda+B$$

எனறுங காட்டுக.

[London S. 1946]

19. $(x^2+y^2)^3-2a^3(x^3-3xy^2)+a^6=$ மாறிலி, எனனும் உருளையினம் சமவழுத்தப பரப்புக்களின் ஓர் இயல் தகக வடிவமென்று காட்டு; ஒதத அழுதததத்தையுங காண்க.

[London S. 1938]

20. λ ஆனது ஒரு மாறத்தக்க பரமானமாயிருக்குமிடத்து

$$\frac{x^2+y^2}{a^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}=1$$

என்னும் கோளப்போலியினம் சமவழுத்தப் பரப்புக்களின் ஓர் இயல்தக்க வடிவம் என்று காட்டுக ; அழுத்தச் சாரயையும் துணிக.

21. n, m என்பன முழுவெண்களாக, $F(\theta)$ என்பது θ இன் ஒரு சார்பு மாத்திரமாயிருக்குமிடத்து,

$$V=r^n e^{im\phi} F(\theta)$$

என்பது கோளமுனைவாள்கூறுகள் r, θ, ϕ என்பனவற்றிலுள்ள லப்பிளாசின் சமன்பாட்டைத் திருப்திப்படுத்தினால், $\mu=$ கோசை θ ஆயிருக்குமிடத்து $F(\theta)$ ஆனது

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dF}{d\mu}\right]+\left[n(n+1)-\frac{m^2}{1-\mu^2}\right]F=0$$

என்னும் வகையீட்டுச் சமன்பாட்டைத் திருப்திப்படுத்துமெனக் காட்டுக.

22. ϕ_1, ϕ_2 என்னும் நிலையின் இரண்டு சார்புகள் ஒரு பரப்பு S இற்கு உள்ளேயுள்ள எல்லாப் புள்ளிகளிலும் $\nabla^2\phi_1=0$, $\nabla^2\phi_2=0$ ஆகுமாறு உள்ளன. பரப்பின் மீது $\frac{\partial\phi_1}{\partial n}=\frac{\partial\phi_2}{\partial n}$, இங்கு $\frac{\partial}{\partial n}$ என்பது வெளிமுகச் செவ்வன் வழியே வகையிடுதலைக் குறிக்கும். $(\phi_1-\phi_2)$ படி $(\phi_1-\phi_2)$ என்பதற்கு விரித் தேற்றத்தைப் பிரயோகித்தலால் அல்லது வேறு வழியால், ϕ_1, ϕ_2 என்பன ஒரு மாறிலியால் வித்தியாசப்படுமெனக் காட்டுக.

[Camb. N. S. 1949]

23 காவிகள் $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ என்பன நிலை, நேரம் என்பவற்றின் சார்புகளாய

$$\text{விரி } \mathbf{E}=0, \qquad \text{விரி } \mathbf{H}=0$$

$$\text{சுருட்டை } \mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}, \quad \text{சுருட்டை } \mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}$$

என்னும் மக்ஸ்வெல்லின் சமன்பாடுகளைத் திருப்திப்படுத்தினால்,
$\mathbf{E}$ ஆனது

$$\nabla^2\mathbf{E}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{E}$$

என்பதைத் திருப்திப்படுத்துமெனக் காட்டுக.

$$\mathbf{S} \text{ ஆனது } \nabla^2\mathbf{S}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{S}$$

என்பதைத் திருப்திப்படுத்தும் நிலை நேரங்களின் ஒரு சிக்கற் காவிச் சார்பாயிருக்குமிடத்து மக்ஸ்வெல்லின் சமன்பாடுகள்

$$\mathbf{E}+i\mathbf{H}=i \text{ சுருட்டை } \frac{\partial\mathbf{S}}{\partial t}+\text{சுருட்டை சுருட்டை } \mathbf{S}$$

என்பதாலே திருப்திப்படுமென்றுங் காட்டுக.

[Lond. G. II. 1958]

24. $$\int_{\Omega}(\phi\nabla^2\psi - \psi\nabla^2\phi)\,\mathrm{d}\Omega = \int_S\left(\phi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\phi}{\partial n}\right)\mathrm{d}S$$

என்னுங் கிறீனின் தேற்றத்தை உண்மையெனக் கொண்டு, $\nabla^2\psi = 0$ என்னுந் தொடர்பைத் திருப்திப்படுத்தும் ஒரு சார்பு, S இற்கு உட்பக்கமான ஒரு புள்ளி P யில், ψ_P இன் பெறுமானம்

$$\psi_P = \frac{1}{4\pi}\int_S \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial n}\,\mathrm{d}S - \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega}\psi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}S$$

என்னுந் தொடர்பினாலே தரப்படுமென நிறுவுக ; இங்கு r ஆனது P இலிருந்து $\mathrm{d}S$ இன் தூரம்.

P உற்பத்தியாயும் S ஆனது $x^2+y^2+z^2=a^2$ என்னுங் கோளமாயும் ψ ஆனது $yz+zx+xy$ என்னுஞ் சார்பாயுமிருக்குமிடத்து இத்தொகையீடுகள் ஒவ்வொன்றுக்கும் பெறுமானங் கணித்தலால் முடிபை வாய்ப்புப் பார்க்க

[Camb. P. N. S. 1949]

சுட்டி